XLIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Eliminacje rejonowe

Czas trwania zawodów: 150 minut

Każdy uczeń rozwiązuje dwadzieścia cztery zadania testowe, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

1. Dana jest liczba postaci $w = 0,(abc)...$ (okresowy ułamek dziesiętny). Wtedy

.... istnieją takie a, b, c, że w nie jest liczbą wymierną
.... istnieją takie a, b, c, że $w = 1$
.... istnieją takie a, b, c nie wszystkie równe 0, że $w < 0,001$

2. Rozważmy równanie $x^2 + ax + 4 = 0$. Wówczas istnieje taka liczba rzeczywista a, że równanie to ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

.... $x_1x_2 < x_1 + x_2$
.... $x_1x_2 > x_1 + x_1$
.... $x_1x_2 = x_1 + x_2$

3. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

.... $x^2 - x + \frac{1}{2} > 0$
.... $x^4 - x^2 + \frac{1}{2} > 0$
.... $x^4 - x + 1 > 0$

4. Dla pewnej liczby całkowitej a równanie $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ ma

.... dokładnie jeden pierwiastek całkowity
.... dokładnie dwa różne pierwiastki całkowite
.... dokładnie trzy różne pierwiastki całkowite

5. Prosta o równaniu $ax+by = c$ ma punkty wspólne tylko z jedną osią współrzędnych. Wtedy

.... $ab \neq c$
.... $ac \neq bc$
.... $abc = 0$

6. Punkt, którego obie współrzędne (w prostokątnym układzie współrzędnych) są liczbami całkowitymi nazywamy *punktem kratowym.* Prosta o równaniu $19x + 15y = 1$ przechodzi przez

.... co najmniej jeden punkt kratowy
.... co najwyżej skończoną ilość punktów kratowych
.... nieskończenie wiele punktów kratowych

7. Jeżeli układ równań

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

jest spełniony przez współrzędne punktów $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ i $C = (x_3, y_3)$, które nie leżą na jednej prostej, to

.... $a = e = f$
.... $a = 2d, 16b = e, 84c = 85f$ i $a = 2002e$
.... $ae \neq bd$

8. Funkcja f określona wzorem $f(x) = \dfrac{x+37}{x-5}$ dla tylko

.... pięciu wartości całkowitych x przyjmuje wartości całkowite
.... ośmiu wartości całkowitych x przyjmuje wartości całkowite
.... szesnastu wartości całkowitych x przyjmuje wartości całkowite

9. W trójkąt o bokach długości a, b, c wpisano okrąg, a następnie poprowadzono styczną do tego okręgu równoległą do boku o długości c i nie zawierającą tego boku. Wtedy długość odcinka będącego częścią wspólną poprowadzonej stycznej i wnętrza trójkąta jest równa

.... $\frac{a(b+c-a)}{a+b+c}$

.... $\frac{c(a+b-c)}{a+b+c}$

.... $\frac{b(a+c-b)}{a+b+c}$

10. W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości środkowych opuszczonych na obie przyprostokątne

.... jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej
.... stanowi $\frac{3}{4}$ kwadratu długości przeciwprostokątnej
.... stanowi $\frac{5}{4}$ kwadratu długości przeciwprostokątnej

11. Wielomian $W(X) = X^{2003} + X - 1$ ma

.... jedno miejsce zerowe będące liczbą wymierną
.... co najmniej dwa miejsca zerowe będące liczbami rzeczywistymi niewymiernymi
.... tylko jedno miejsce zerowe będące liczbą niewymierną dodatnią

12. Reszta z dzielenia liczby $4^{105} + 3^{105}$ przez 5 wynosi

.... 4
.... 3
.... 2

13. Niech dane będą liczby naturalne $p, q \in \mathbb{N}$. Niech $\alpha(p, q) = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots$ będzie liczbą zapisaną w systemie dziesiętnym, której cyfra ε_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, jest resztą z dzielenia liczby $k^2 + pk + q$ przez 10. Wówczas

.... różnych liczb postaci $\alpha(p, q)$ jest nie więcej niż 10
.... niektóre z liczb $\alpha(p, q)$ są liczbami wymiernymi
.... istnieją takie $p, q \in \mathbb{N}$, że $\varepsilon_9 = \varepsilon_{10} = 0$.

14. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

Wówczas

.... równanie $f(x) = 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie
.... równanie $f(x) = 2$ ma dwa rozwiązania
.... równanie $1000f(x) = 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie

15. Czworościan foremny

.... nie ma płaszczyzny symetrii
.... nie ma osi symetrii
.... nie ma środka symetrii

16. *Pasem* nazywamy część płaszczyzny zawartą między dwiema równoległymi prostymi. Niech $\mathcal{A}$ będzie wykresem funkcji $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \mathrm{tg}x$. Wówczas

.... $\mathcal{A}$ zawiera się w pewnym pasie o szerokości π
.... istnieje pas o szerokości mniejszej niż π zawierający $\mathcal{A}$
.... jeżeli pas jest równoległy do osi rzędnych i zawiera $\mathcal{A}$, to jego szerokość jest $\geq \pi$

17. Wielomian $W(X)$ ma dokładnie jeden pierwiastek i wielomian $W(X) + 2$ ma również dokładnie jeden pierwiastek. Wówczas

.... wielomian $W(X) + 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek
.... wielomian $W(X)$ jest stopnia nieparzystego
.... wielomian $W(X) + 2002$ może mieć dokładnie trzy pierwiastki

18. Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $(1, 2), (2, 3)$ i $(3, 8)$. Wtedy

.... współczynniki a, b, c są liczbami wymiernymi
.... wykres ten ma z prostą $y = 1$ dokładnie jeden punkt wspólny
.... wykres ten ma z prostą $x = 2002$ dokładnie jeden punkt wspólny

19. Liczba $\left(\frac{4}{5}\right)^{100}$

.... ma w zapisie dziesiętnym co najmniej 3 zera tuż po przecinku
.... ma w zapisie dziesiętnym co najmniej 20 zer tuż po przecinku
.... jest większa od 1

20. Dane są następujące podzbiory płaszczyzny

$$\mathcal{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad \mathcal{B} = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leq 1\}.$$

Wówczas

.... $\mathcal{A}$ jest podzbiorem $\mathcal{B}$
.... część wspólna $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ jest zbiorem wypukłym
.... suma $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ jest zbiorem wypukłym

21. Funkcje ss, sc, cs, cc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane są wzorami

$$\mathrm{ss}(x) = \sin(\sin x), \quad \mathrm{sc}(x) = \sin(\cos x), \quad \mathrm{cs}(x) = \cos(\sin x), \quad \mathrm{cc}(x) = \cos(\cos x).$$

Wówczas

.... dokładnie dwie z tych funkcji są funkcjami nieparzystymi
.... dokładnie trzy z nich mają okres równy π
.... dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|\mathrm{ss}(x)| < 1$

22. Wielomian $W(X)$ ma tę własność, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = W(x+1) - W(x)$$

dla żadnego x nie przyjmuje wartości równej zero. Wówczas

.... stopień wielomianu $W(X)$ jest liczbą parzystą
.... wielomian $W(X)$ nie ma pierwiastków
.... jeżeli wielomian $W(X)$ nie ma pierwiastków, to dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $W(x) = \frac{W(x)}{|W(x)|}$

23. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas

.... ciąg (c_n) dany przez $c_n = a_{n+2}^2 - a_n^2$ dla $n = 1, 2, \ldots$ jest ciągiem arytmetycznym
.... ciąg (d_n) dany przez $d_n = 3a_{2n}$ jest ciągiem arytmetycznym
.... średnia arytmetyczna wyrazów $a_{72}, a_{73}, \ldots, a_{2002}$ wynosi a_{1037}

24. Niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór wszystkich liczb ośmiocyfrowych, do zapisu których **w systemie dziewiątkowym** użyto wyłącznie cyfr 1, 4. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}$ ma dokładnie 2^8 elementów
.... dokładnie 2^7 liczb ze zbioru $\mathcal{A}$ to liczby parzyste
.... dokładnie 16 liczb ze zbioru $\mathcal{A}$ to liczby podzielne przez 9

XLIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Z a d a n i a   f i n a ł o w e

1. Iloczyn pewnych trzech (dodatnich) liczb pierwszych równa się ich pięciokrotnej sumie. Wyznacz wszystkie trójki takich liczb pierwszych.

2. Udowodnić, że dla dowolnej $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|\sin x| + 2|\sin(x+1)| + 3|\sin(x+2)| + 4|\sin(x+3)| + 5|\sin(x+4)| \geq 6\sin 1.$$

Rozstrzygnąć, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość.

3. Niech punkty S, T, U, W leżą na kolejnych bokach kwadratu jednostkowego. Dowieść, że obwód czworokąta $STUW$ jest $\geq 2\sqrt{2}$. Rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

4. Na ile sposobów można tak rozdać ośmiu uczniom należące do nich legitymacje, aby każdy z nich dostał jedną legitymację i żaden nie dostał swojej?

Uwagi.
1. Czas trwania zawodów 180 minut.
2. Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na osobnej kartce.
3. Nie wolno korzystać z kalkulatorów.