2. ZADANIA TEKSTOWE - rozwiązania

1. *Uzasadnij, że jeżeli równanie* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *ma trzy rozwiązania rzeczywiste, to* $a^2 \geqslant 3b$.

Rozwiązanie. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,\ x_2,\ x_3$ zachodzi nierówność

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geqslant 0.$$

Przekształcając tę nierówność otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) &\geqslant 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3), \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &\geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) &\geqslant 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3), \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 &\geqslant 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3). \qquad (1) \end{aligned}$$

Niech teraz $x_1,\ x_2,\ x_3$ będą rozwiązaniami równania $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Wówczas

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

a stąd, z porównania współczynników wielomianów po obu stronach równości, otrzymujemy

$$-a = x_1 + x_2 + x_3, \qquad b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Wykorzystując powyższe zależności, z nierówności (1), dostajemy $a^2 \geqslant 3b$, czyli tezę zadania.

2. *Nierównoległe boki trapezu przedłużono do wzajemnego przecięcia i przez otrzymany w ten sposób punkt poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu. Wyznacz długość odcinka tej prostej ograniczonego przez przedłużenia przekątnych trapezu, jeśli podstawy trapezu mają długości* a, b *(*$a > b$*).*

Rozwiązanie. Niech będzie dany trapez $ABCD$ o podstawach $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ długości odpowiednio a i b $(a > b)$. Punkt wspólny prostych l_{AD} i l_{BC} oznaczmy przez P. Przez punkt P prowadzimy prostą l równoległą do $\overline{AB}$. Niech T, U będą punktami wspólnymi prostej l i odpowiednio prostych l_{AC} i l_{BD}.

Interesuje nas długość odcinka $\overline{TU}$. Oznaczając $|UP| = x$ i $|PT| = y$ i korzystając z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{y}{b} = \frac{|PA|}{|DA|} = \frac{|PA|}{|PA| - |PD|} = \frac{1}{1 - \frac{|PD|}{|PA|}} = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a}{a - b}$$

oraz

$$\frac{x}{b} = \frac{|PB|}{|CB|} = \frac{|PA|}{|DA|}.$$

Zatem

$$|UT| = |UP| + |PT| = x + y = \frac{2ab}{a - b}.$$