XLIV MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE
26. 04. 2003

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Dana jest funkcja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona w ten sposób, że $P(x)$ jest polem części wspólnej dwóch kół o środkach w punktach $(5 - x, 0)$, $(-5 + x, 0)$ i takim samym promieniu $r = 3$. Wówczas

.... funkcja P jest parzysta
.... na pewnym przedziale o długości $\frac{7}{2}$ funkcja P przyjmuje wartości dodatnie
.... dla dwóch różnych argumentów przyjmuje wartość $8\sqrt{7}$

2. Wiadomo, że wykresy funkcji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonych wzorami $f(x) = ||x - a| - 2|$, $g(x) = bx$, mają dokładnie trzy punkty wspólne. Wówczas

.... $ba > 0$
.... $a \geqslant 2$
.... $|b| \leqslant 1$

3. W trapezie $ABCD$ o podstawach $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ przekątne przecinają się w punkcie K. Jeżeli pole trójkąta $\triangle KCD$ wynosi 2 i pole trójkąta $\triangle BKC$ wynosi 6, to

.... pole trójkąta $\triangle ABK$ wynosi 18
.... pole trapezu $ABCD$ wynosi 32
.... wysokość trapezu $ABCD$ ma długość 4

4. Istnieje liczba wymierna $w = \frac{p}{q}$ (p, q są liczbami całkowitymi), która nie jest liczbą całkowitą i spełnia warunek ($[x]$ = część całkowita liczby x)

.... $[\frac{p}{q}] + \frac{1}{q} > \frac{p}{q}$
.... $[w - [w]] \neq 0$
.... $[-w] = -[w]$

5. Niech liczby p i q ($p < q$) będą kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 5. Wówczas

.... $p + q$ może być liczbą pierwszą

.... $p + q$ jest iloczynem co najmniej trzech liczb naturalnych (niekoniecznie różnych) większych od 1

.... $NWD(p + q, q - p) = 2$

6. Niech A oznacza zbiór wszystkich par liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^2 = 2+\frac{1}{x^2y^2}$. Niech B oznacza zbiór wszystkich par liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie $(x + y)^2 - 2(xy)^2 = 1$. Wtedy

.... A zawiera co najmniej trzy pary liczb

.... B zawiera co najmniej dwie pary liczb

.... $A \neq B$

7. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami, że $g(x) = f(x+2)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli funkcje f, g są nieparzyste, to

.... $f = g$

.... funkcja f jest okresowa i jeden z jej okresów wynosi 2

.... funkcja f musi być stała

8. Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia 2003 o współczynnikach całkowitych. Wtedy

.... liczba $W(2003)$ jest parzysta

.... równanie $W(x) = 0$ ma rozwiązanie rzeczywiste

.... równanie $W(x) = 2003$ ma rozwiązanie rzeczywiste

9. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$. Jeżeli równanie $f(x) = 2x+1$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$

.... $f(x) > 2x + 1$

.... $f(f(x)) > 4x$

.... $f(f(f(x))) < 8x$

10. Oznaczmy przez $d(n)$ ilość wszystkich dodatnich dzielników liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Wówczas

.... istnieje taka liczba n, że $d(n) = 2003$

.... jeżeli $d(n) = 17$, to n jest ósmą potęgą liczby naturalnej

.... jeżeli $d(n) = 15$, to n jest siódmą potęgą liczby naturalnej

11. Niech (a_n) będzie niestałym ciągiem arytmetycznym o wyrazach całkowitych nieujemnych i niech S_n oznacza sumę cyfr dziesiętnych liczby a_n. Wówczas

.... wyrazy a_{24}, a_{54}, a_{74} mają taką samą ostatnią cyfrę

.... ciąg skończony $S_1, S_2, S_3, ..., S_7$ jest ciągiem arytmetycznym

.... istnieje wyraz a_n, w zapisie dziesiętnym którego występują kolejno 2003 zera (nie na początku!)

12. Jeżeli punkt C krąży po okręgu o średnicy $\overline{AB}$, to największa wartość iloczynu $2|CA| \cdot |CB|$ wynosi

.... $4|AB|$
.... $|AB|^2$
.... $(|AB|+1)^2$

13. Na każdej prostej (na płaszczyźnie), która nie jest równoległa do żadnej osi układu współrzędnych i nie przechodzi przez początek układu współrzędnych leży taki punkt (a, b), że

.... $|a| = |b|$
.... liczby a, b są obie wymierne
.... liczby a, b są obie niewymierne

14. Trójkąt $\mathcal{T}$ o bokach a, b, c ma pole $S = abc$. Wówczas

.... jeden z jego boków może mieć długość 1
.... istnieje tylko jeden (z dokładnością do przystawania) taki trójkąt
.... trójkąt $\mathcal{T}$ zawiera się w pewnym kole o promieniu $\frac{1}{2}$

15. W przestrzeni istnieje taki trójkąt $\triangle ABC$ o wierzchołkach w punktach kratowych (mających wszystkie współrzędne całkowite), że

.... liczby $|AB|, |BC|, |CA|$ są liczbami całkowitymi
.... liczby $|AB|^2, |BC|^2, |CA|^2$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi
.... liczby $|AB|, |BC|, |CA|$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi

16. Wielomiany $P(X)$ i $Q(X)$ są takie, że $|P(x)| = |Q(x)| + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

.... $Q(x)$ może być liczbą ujemną dla pewnego $x \in \mathbb{R}$
.... $|P(x) - Q(x)| = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
.... wielomian $P(X)$ jest wielomianem stopnia nieparzystego

17. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że ciąg (u_n) określony wzorem $u_n = [an^2 + bn + c]$ (*część całkowita*) jest ściśle malejącym ciągiem arytmetycznym. Wówczas

.... $a < 0$
.... b może się równać $-\frac{1}{2}$
.... $b < 0$

18. Trójkąt $\mathcal{T}$ jest taki, że można go rozciąć na dwa trójkąty, z których co najmniej jeden jest podobny do trójkąta $\mathcal{T}$. Wówczas trójkąt $\mathcal{T}$

.... może być równoramienny
.... może być rozwartokątny
.... musi być prostokątny

19. Ośmiocyfrowa (w zapisie dziesiętnym) liczba n ma jedną cyfrę równą 4, jedną równą 5 i pozostałe cyfry równe 2. Wówczas

.... n jest podzielna przez 3
.... n może być kwadratem liczby naturalnej
.... n jest podzielna przez 7

20. Niech $W(k)$ oznacza ilość sposobów rozstawienia k wież na szachownicy 8×8 tak, by żadna nie szachowała żadnej innej. Wówczas

.... $W(1) = 64$
.... $W(k) < W(k+1)$ dla każdej liczby $1 \leqslant k \leqslant 7$
.... wśród liczb $W(1),\ W(2), ..., W(8)$ występują dokładnie dwa kwadraty

2. ZADANIA TEKSTOWE

Zadania tekstowe punktowane są w skali od 0 do 15 punktów.

1. Uzasadnij, że jeżeli równanie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste, to $a^2 \geqslant 3b$.

2. Nierównoległe boki trapezu przedłużono do wzajemnego przecięcia i przez otrzymany w ten sposób punkt poprowadzono prostą równoległą do podstaw trapezu. Wyznacz długość odcinka tej prostej ograniczonego przez przedłużenia przekątnych trapezu, jeśli podstawy trapezu mają długości a, b $(a > b)$.

Czas trwania zawodów: 180 minut.