ZADANIA TEKSTOWE - rozwiązania

1. *Równolegobok zawiera koło o promieniu r i zawarty jest w kole o promieniu R. Udowodnij, że*

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}.$$

Rozwiązanie. Niech A będzie wierzchołkiem nierozwartego kąta w równoległoboku $ABCD$. Niech O będzie środkiem okręgu o promieniu R, o którym mowa w treści zadania. Wówczas

$$|AC| \leqslant |AO| + |OC| \leqslant R + R = 2R. \tag{1}$$

Niech h oznacza niewiększą z dwóch wysokości równoległoboku $ABCD$. Okrąg o promieniu r (zawarty w $ABCD$) leży między równoległymi prostymi l_{AB} i l_{CD} i jednocześnie między l_{AD} i l_{BC}. Zatem

$$h \geqslant 2r. \tag{2}$$

Nie zmniejszając ogólności rozwiązania możemy założyć, że $|AB| \geqslant |BC|$ Wówczas w trójkącie $\triangle ABC$ mamy

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BCA| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle CAB| \leqslant |\sphericalangle BCA|$$

i stąd

$$|\sphericalangle CAB| \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{3}$$

Mamy wówczas

$$R \geqslant \frac{1}{2}|AC| = \cdot\frac{|AC|}{h} \cdot \frac{h}{2r} \cdot r \geqslant \frac{|AC|}{h} \cdot r = \frac{r}{\sin(|\sphericalangle CAB|)} \geqslant \frac{r}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2}r,$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z (1), druga z (2), a trzecia z (3).

2. *Nauczyciel napisał na tablicy 10 następujących liczb:*

$$6,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10, 12$$

i powiedział uczniom, że otrzymał je obliczając sumy wszystkich dziesięciu par utworzonych z liczb układu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, *gdzie* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$. *Odtwórz liczby tego układu.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że dwiema najmniejszymi z podanych sum $x_i + x_j$ są

$$x_1 + x_2 \leqslant x_1 + x_3,$$

a dwiema największymi są

$$x_4 + x_5 \geqslant x_3 + x_5.$$

Wobec tego

$$x_1 + x_2 = 6, \tag{1}$$

$$x_1 + x_3 = 6, \tag{2}$$

$$x_4 + x_5 = 12, \tag{3}$$

$$x_3 + x_5 = 10. \tag{4}$$

Wśród wszystkich dziesięciu sum $x_i + x_j$, $i \neq j$, każda liczba x_i występuje 4 razy. Zatem

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 6 + 6 + 7 + 8 + 9 + 9 + 9 + 10 + 10 + 12 = 86,$$

a więc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{43}{2} = 21,5. \tag{5}$$

Z (1) i (2) widzimy, że $x_2 = x_3$. Z (1), (3) i (5) mamy $x_3 = 3,5$. Wówczas z (1): $x_1 = 2,5$, z (4): $x_5 = 6,5$ i ostatecznie z (3): $x_4 = 5,5$

Jeśli więc układ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 spełnia warunki zadania, to musi być $x_1 = 2,5$, $x_2 = x_3 = 3,5$, $x_4 = 5,5$, $x_5 = 6,5$. Łatwo sprawdzamy, że liczby te spełniają warunki zadania.