XLV MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

$20.\,03.\,2004$

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Niech $A_m = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| = m\}$ dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$. Jeśli dla każdej liczby $m \geqslant 0$ zbiór A_m jest jednoelementowy, to

.... f jest funkcją różnowartościową

.... funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne

.... funkcja f może być ściśle monotoniczna

2. Niech $A, B \subset \mathbb{N}$ bedą zbiorami mającymi skończoną liczbę elementów nie mniejszą niż 2. Liczba funkcji ściśle monotonicznych z A do B jest równa 20. Wówczas

.... zbiór B ma o 10 elementów więcej niż zbiór A

.... A może być równy B

.... zbiór B ma nieparzystą liczbę elementów

3. Wielomian $W(X)$ taki, że $W(x^2) = W(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$

.... nie istnieje

.... istnieje dokładnie jeden

.... istnieje i takich wielomianów jest nieskończenie wiele

4. Dana jest liczba naturalna n większa od 6. Wtedy

.... iloczyn $(8n-1)8n(8n+1)$ jest podzielny przez 24

.... jeżeli n oraz $8n-1$ są liczbami pierwszymi, to liczba $8n+1$ nie jest liczbą pierwszą

.... jeżeli n oraz $8n-1$ są liczbami pierwszymi, to liczba $(8n)^2-(8n-1)^2$ jest podzielna przez 3

5. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$.

.... Jeżeli $c(a - b + c) < 0$, to trójmian $f(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty.
.... Jeżeli $c(a + b + c) < 0$, to trójmian $f(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty.
.... Jeżeli $a(a + b + c) < 0$, to trójmian $f(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty.

6. Jeżeli k i m są liczbami całkowitymi i równanie $x^2 + kx + m = 0$ ma pierwiastki wymierne, to

.... obie liczby k, m muszą być nieparzyste
.... jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to k jest liczbą parzystą
.... jeżeli k jest liczbą parzystą, to m jest liczbą nieparzystą

7. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta i okresowa. Wówczas

.... funkcja f jest ograniczona
.... funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x))^2$, jest okresowa
.... funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(|x|)$, jest okresowa

8. Wielościan, którego rzuty prostokątne na pewne dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny są kwadratami o polu 1

.... jest sześcianem
.... ma objętość nie większą niż 1
.... jest wypukły

9. Niech P bedzie punktem leżącym wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości a. Niech u, v, w będą odległościami punktu P od kolejnych boków tego trójkąta. Wtedy

.... $u + v + w = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
.... $uvw = \frac{1}{3}a^3$
.... $u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{4}a^2$

10. Okręgi $\mathcal{K}_1 = K(O_1, r_1)$, $\mathcal{K}_2 = K(O_2, r_2)$, $\mathcal{K}_3 = K(O_3, r_3)$ są parami zewnętrznie styczne i A, B, C są punktami wspólnymi odpowiednio okręgów $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_3$ i $\mathcal{K}_1$. Wówczas

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest podobny do trójkąta $\triangle O_1O_2O_3$
.... jeśli trójkąt $\triangle O_1O_2O_3$ jest rozwartokątny, to trójkąt $\triangle ABC$ też jest rozwartokątny
.... proste $l_{CO_2}, l_{BO_1}, l_{AO_3}$ przecinają się w jednym punkcie

11. Danych jest osiem różnych punktów $A_1, A_2, ..., A_8$ na okręgu o promieniu 1. Wówczas

.... istnieją takie dwa punkty A_i, A_j, że $|A_iA_j| \leqslant 0,8$
.... istnieją takie dwa punkty A_i, A_j, że $|A_iA_j| \geqslant 1$
.... pewien kąt $\sphericalangle A_iA_jA_k$ (dla różnych i, j, k) ma miarę nie większą niż 21°

12. Niech h, m oznaczają odpowiednio wysokość i środkową trójkąta $\triangle ABC$ poprowadzone z wierzchołka C. Wówczas

.... jeżeli $h = 1$ i $m = 2004$, to trójkąt $\triangle ABC$ jest rozwartokątny
.... jeżeli $h = 1$, $m = 2004$, to $S_{\triangle ABC} > 5$
.... jeżeli $\triangle ABC$ jest równoramienny, to $h = m$

13. Jeżeli $\{a_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczbowym, to przez $\{a_n^c\}$ oznaczmy ciąg dany wzorem $a_n^c = a_1 + a_2 + ... + a_n$, a przez $\{a_n^d\}$ ciąg dany wzorem $a_n^d = a_{n+1} - a_n$. Wówczas dla dowolnych ciagów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

.... jeżeli $\{a_n^c\} = \{b_n^c\}$, to $\{a_n\} = \{b_n\}$
.... jeżeli $\{a_n\}$ jest arytmetyczny, to $\{(a_n^c)^d\}$ jest arytmetyczny
.... ciąg $\{a_n^c\}$ jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy $\{a_n\}$ jest rosnący

14. Niech $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $c(x) = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$ ($[t]$ = część całkowita liczby t). Wówczas

.... dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|c(x) - c(y)| \leqslant |x - y|$
.... funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = c(x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}$ jest nieparzysta
.... funkcja c jest parzysta

15. Trójkąt $\triangle ABC$ ma boki długości a, b, c. Wówczas

.... jeżeli $a^2 + b^2 - c^2 < -1$, to $\triangle ABC$ jest rozwartokątny
.... jeżeli $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab - 1$, to $\triangle ABC$ nie jest prostokątny
.... jeżeli $a^2 + b^2 = c^2 + 32$, to $\triangle ABC$ jest ostrokątny

16. Płaszczyzna przecina sześcian o krawędzi równej 2. Przekrojem jest trójkąt $\triangle ABC$. Wówczas

.... $\triangle ABC$ może być równoboczny
.... $\triangle ABC$ może być prostokątny
.... może być $|AB| = 1,\ |BC| = \frac{1}{\sqrt{2}}, |CA| = \sqrt{2}$

17. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y

.... $[\max(x, y)] = \max([x], [y])$ ($[t]$ = część całkowita liczby t)
.... $|\max(x, y)| = \max(|x|, |y|)$
.... $\sin(\max(x, y)) = \max(\sin x, \sin y)$

18. Niech $J^{(\lambda)}$ będzie jednokładnością o środku w punkcie $(0, 0)$ i skali $\lambda \neq 0$. Przez W_f oznaczmy wykres funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wówczas

.... $J^{(\lambda)}(W_f) = W_g$, gdzie $g(x) = \lambda f(\frac{1}{\lambda}x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$
.... jeśli $J^{(-1)}(W_f) = W_f$, to funkcja f jest nieparzysta
.... istnieje taka niezerowa funkcja f, że $W_{-f} = J^{(-2)}(W_f)$

19. Liczbę naturalną n nazwiemy *porządną*, gdy ilość liczb naturalnych k względnie pierwszych z n i takich, że $1 \leqslant k \leqslant n$, wynosi $\frac{1}{2}n$. Załóżmy, że m i n są liczbami porządnymi. Wówczas

.... nm jest liczbą porządną
.... $n + m$ jest liczbą porządną
.... n^m jest liczbą porządną

20. Ciągowi $\{a_n\}$ przyporządkowujemy ciąg $\{a'_n\}$ dany wzorem $a'_n = \max(a_n, a_{n+1})$ ($n \in \{1, 2, 3, ...\}$). Wówczas

.... jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest arytmetyczny, to $\{a'_n\}$ też jest arytmetyczny
.... jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest geometryczny, to $\{a'_n\}$ też jest geometryczny
.... jeżeli ciąg $\{a'_n\}$ jest ściśle rosnący, to $\{a_n\}$ też jest ściśle rosnący

2. ZADANIA TEKSTOWE

Zadania tekstowe punktowane są w skali od 0 do 15 punktów.

1. Równolegobok zawiera koło o promieniu r i zawarty jest w kole o promieniu R. Udowodnij, że

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}.$$

2. Nauczyciel napisał na tablicy 10 następujących liczb:

$$6,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10, 12$$

i powiedział uczniom, że otrzymał je obliczając sumy wszystkich dziesięciu par utworzonych z liczb układu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, gdzie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$. Odtwórz liczby tego układu.