2. ZADANIA TEKSTOWE - rozwiązania

1. *Zbiór A składa się ze wszystkich takich par (n, m) liczb całkowitych dodatnich, dla których $n < m \leqslant 2005$ i $121|n^2 + m^2$. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze, które dzielą moc zbioru A.*

Rozwiązanie. Równości

$$\begin{aligned}
&(11k)^2 = 11 \cdot 11k^2 + 0,\\
&(11k \pm 1)^2 = 11(11k^2 \pm 2k) + 1,\\
&(11k \pm 2)^2 = 11(11k^2 \pm 4k) + 4,\\
&(11k \pm 3)^2 = 11(11k^2 \pm 6k) + 9,\\
&(11k \pm 4)^2 = 11(11k^2 \pm 8k + 1) + 5,\\
&(11k \pm 5)^2 = 11(11k^2 \pm 10k + 2) + 3
\end{aligned}$$

pokazują, że kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez 11 dają reszty 0, 1, 3, 4, 5, 9. Aby suma dwóch kwadratów dawała resztę 0 przy dzieleniu przez 11 oba składniki muszą dzielić się przez 11. Dla dowolnej liczby całkowitej k podzielność k^2 przez 11 jest równoważna podzielności k przez 11, gdyż 11 jest liczbą pierwszą. Widzimy więc, że para (n, m) należy do zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy $n < m$ oraz $n, m \in \{11, 22, 33, 44, ..., 182 \cdot 11\}$. Zatem zbiór A ma tyle elementów ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru 182-elementowego, czyli

$$\binom{182}{2} = \frac{181 \cdot 182}{2} = 181 \cdot 91 = 181 \cdot 13 \cdot 7.$$

Liczby pierwsze, które dzielą moc zbioru A to 181, 13, 7.

2. *Obliczyć maksymalną ilość części, na które może być podzielona płaszczyzna przez 10 okręgów.*

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $C(n)$ maksymalną ilość części, na które może być podzielona płaszczyzna przez n okręgów ($n \in \{1, 2, 3, ...\}$). Zauważamy, że $C(1) = 2$. Niech teraz $k+1$ okręgów dzieli płaszczyznę na $C(k + 1)$ części. Wówczas każde dwa z nich mają dokładnie 2 punkty wspólne i żadne trzy z nich nie mają punktu wspólnego. Między innymi $(k + 1)$-szy okrąg przecina pozostałe k okręgów w $2k$ punktach. Punkty te dzielą $(k + 1)$-szy okrąg na $2k$ łuków, z których każdy dzieli jeden z obszarów wyznaczonych przez pozostałe k okręgów na dwie części. Zatem mamy zależność

$$C(k + 1) = C(k) + 2k, \quad k \in \{1, 2, 3, ...\}.$$

W szczególności

$$\begin{aligned}
&C(1) = 2,\\
&C(2) = C(1) + 2,\\
&C(3) = C(2) + 4,\\
&\qquad\vdots\\
&C(n) = C(n - 1) + 2(n - 1).
\end{aligned}$$

Po dodaniu stronami i redukcji otrzymujemy

$$\begin{aligned} C(n) = 2 + 2 + 4 + 6 + ... + 2(n-1) = 2 + 2(1 + 2 + 3 + ... + n - 1) \\ = 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

Zatem $C(10) = 92$.