# XLVI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

$19.\,03.\,2005$

## 1. TEST

**Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo** *TAK* **lub** *NIE* **w miejscu zaznaczonym kropkami.**

**Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.**

**1.** Dane są takie liczby całkowite $k_1,\ k_2, \ldots, k_{100}$, że $k_1 + k_2 + \cdots + k_{100} = 100001$. Wtedy co najmniej jedna z liczb $k_1,\ k_2, \ldots, k_{100}$ jest

.......... parzysta
.......... nieparzysta
.......... niepodzielna przez 3

**2.** Wypisujemy wszystkie liczby naturalne od 1 do $n$ zapisane w systemie dziesiętnym. Niech $C(n)$ oznacza ilość cyfr, które musieliśmy napisać. Wówczas

.......... istnieje takie $n$, że $C(n) = 100$
.......... istnieje takie $n$, że $C(n) = 201$
.......... liczba $C(10^n)$ jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n + 1$ jest podzielna przez 3

**3.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(X)$ przez wielomian $X^4 - 2X^3 + X - 2$ jest równa $X^3 + X^2 + 2$. Wówczas

.......... $W(-1) = 2$
.......... $W(2) = 14$
.......... reszta z dzielenia wielomianu $W(X)$ przez $X^2 - X - 2$ wynosi $2X + 14$

**4.** $a$, $b$, $c$, $d$ są kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi ($a < b < c < d$). Wówczas

.......... jeżeli $2048|abcd$, to $a > 2005$
.......... jeżeli $2005|a + b + c + d$, to $a = 1001$
.......... $abcd \neq 2^{2005}$

**5.** Zbiorem rozwiązań nierówności $ax^2 + bx + c > 0$ jest przedział $(-5, 5)$. Wynika stąd, że

.......... $a < 0$ i $b = 0$
.......... $c = -25a$
.......... $a + c > 0$

**6.** Niech $L(a)$ będzie liczbą rzeczywistych rozwiązań równania $|x-2| + |x+1| = a$ ($a \in \mathbb{R}$). Wówczas

.......... $L(2) < 2$
.......... $L(3) > 3$
.......... $L(4) > 4$

**7.** Trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) o współczynnikach całkowitych, ma tę własność, że $f(2003) = f(2004) = 2005$. Wówczas

.......... jest tylko jeden taki trójmian
.......... takich trójmianów jest co najwyżej $2005^3$
.......... $|f(0)| > 4 \cdot 10^6$

**8.** Wielomian $W(X)$ o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że dla dowolnej liczby całkowitej $k$ liczba $W(k)$ jest podzielna przez 3. Wówczas

.......... wszystkie współczynniki wielomianu $W(X)$ są podzielne przez 3
.......... jeżeli $W(X)$ jest wielomianem stopnia drugiego, to wszystkie jego współczynniki są podzielne przez 3
.......... istnieje taki wielomian $G(X)$ o współczynnikach całkowitych, że $W(k) = G(k^3 - k)$ dla każdego całkowitego $k$

**9.** Niech $A$ będzie zbiorem rzeczywistych rozwiązań nierówności $\sqrt{6-x} \geqslant x$ oraz niech $B_m = \{x \in \mathbb{R} : (x+3)(x-2)(x-m) \leqslant 0\}$. Wówczas

.......... $A \subset B_{-5}$
.......... $A \cap B_m$ jest zbiorem dwuelementowym dla każdego $m > 2$
.......... $A = B_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{R}$

**10.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla danej liczby rzeczywistej $x$ przez $[x]_n$ oznaczmy największą liczbę całkowitą podzielną przez $n$ i nie większą niż $x$. Wówczas

.......... jeżeli $\frac{1}{3}([x]_1 + [x]_2 + [x]_3) = [x]_1$, to $6 \leqslant x < 7$
.......... jeżeli $[x]_2 = [x]_3 = [x]_4 = \cdots = [x]_{2005}$, to $x \in [0, 2)$
.......... $[x]_n = n\left[\frac{x}{n}\right]_1$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$

**11.** O zbiorze $A$ ($A \subset \mathbb{R}$) wiemy, że $(0,2) \subset A$ lub $A \subset (5, \infty)$. Niech $B = \mathbb{R} \setminus A$. Wówczas

.......... $(0,2) \not\subset B$ i $B \not\subset (5, , \infty)$
.......... jeśli $1 \in B$, to $4 \in B$
.......... $(0,2) \cap B = \emptyset$ lub $(5, \infty) \cap B = \emptyset$

**12.** Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_n)$ o pierwszym wyrazie $a_1$ i różnicy $r$ będącymi liczbami wymiernymi. Wówczas

.......... $a_n$ jest liczbą wymierną dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$
.......... jeżeli $ra_1 = 1$ i $r + a_1 = 2$, to $a_n = n$ dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$
.......... ciąg $(b_n)$, gdzie $b_n = a_n - [a_n]$, jest czystookresowy

**13.** Ciąg arytmetyczny $(a_n)$ nazwiemy *arcyarytmetycznym*, gdy ciąg $([a_n])$ też jest arytmetyczny. Wówczas

.......... każdy ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych jest arcyarytmetyczny
.......... istnieje ciąg arcyarytmetyczny o różnicy niecałkowitej i mający $2005$ wyrazów
.......... nieskończony ciąg arcyarytmetyczny może mieć różnicę niewymierną

**14.** Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieparzystą, to

.......... $f(|x|) = -|f(x)|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
.......... $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)|$ jest funkcją parzystą
.......... $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(f(x))$ jest funkcją parzystą

**15.** Funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są takie, że ich złożenie $f \circ g$ jest funkcją okresową, która nie jest funkcją stałą. Wówczas

.......... $f$ może nie być funkcją okresową
.......... $g$ jest funkcją okresową
.......... $f$ i $g$ mogą nie być funkcjami okresowymi

**16.** Niech $a \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez $T_a$ trójkąt wpisany w parabolę $y = x^2$ o wierzchołkach, których rzuty na oś $Ox$ mają odcięte $a - 1,\ a,\ a + 1$. Wówczas

.......... pole trójkąta $T_a$ jest nie większe niż pole trójkąta $T_0$ dla dowolnego całkowitego $a$
.......... pole trójkąta $T_a$ jest większe niż pole trójkąta $T_0$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$
.......... okrąg opisany na $T_1$ ma promień równy 6

**17.** Niech $P$ będzie wykresem funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Niech $P'$ oznacza obraz zbioru $P$ przy jednokładności o środku w punkcie $(0, -1)$ i skali 2, a $P^*$ obraz zbioru $P$ przy przesunięciu o wektor $[1, 4]$. Wówczas

.......... $P'$ jest wykresem funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$
.......... $P \cap P'$ jest zbiorem pustym
.......... $P^* \cap P'$ jest zbiorem niepustym

**18.** $ABCD$ jest czworokątem wypukłym na płaszczyźnie. Wówczas możliwe jest, że

.......... $D$ jest punktem przecięcia wysokości trójkąta $\triangle ABC$
.......... $D$ jest punktem przecięcia środkowych trójkąta $\triangle ABC$
.......... $D$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ABC$

**19.** Niech $H$ oznacza punkt przecięcia wysokości trójkąta $\triangle ABC$. Wówczas

.......... $C$ jest punktem przecięcia wysokości w trójkącie $\triangle ABH$
.......... jeżeli $C$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ABH$, to $|\sphericalangle C| = 120°$
.......... okrąg opisany na trójkącie $\triangle ABC$ i okrąg opisany na trójkącie $\triangle ABH$ mają równe promienie

**20.** Trójkąt $\mathcal{T}$ na płaszczyźnie mający wierzchołki w punktach o obu współrzędnych całkowitych (w prostokątnym układzie współrzędnych) nazywamy *trójkątem $S$-kratowym*, gdy ma on pole 1. Wówczas

.......... suma długości wysokości trójkąta $S$-kratowego jest liczbą wymierną
.......... co najmniej jedna z długości boków trójkąta $S$-kratowego jest liczbą wymierną
.......... istnieje nieskończenie wiele parami nieprzystających trójkątów $S$-kratowych

## 2. ZADANIA TEKSTOWE

**Zadania tekstowe punktowane są w skali od 0 do 10 punktów.**

**1.** Zbiór $A$ składa się ze wszystkich takich par $(n, m)$ liczb całkowitych dodatnich, dla których $n < m \leqslant 2005$ i $121 | n^2 + m^2$. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze, które dzielą moc zbioru $A$.

**2.** Obliczyć maksymalną ilość części, na które może być podzielona płaszczyzna przez $10$ okręgów.

**Uwagi:**

**1.** Symbol $a|b$ dla liczb całkowitych $a, b$ oznacza, że liczba $a$ dzieli liczbę $b$.
**2.** Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby $x \in \mathbb{R}$.
**3.** Moc zbioru skończonego, to liczba elementów w tym zbiorze.
**4.** Symbol $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.
**5.** Ciąg $(c_n)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, nazywamy czystookresowym, gdy istnieje taka dodatnia liczba całkowita $t$, że równość $c_{n+t} = c_n$ zachodzi dla wszystkich $n$.

**P O W O D Z E N I A!**