ZADANIA TEKSTOWE - rozwiązania.

1. *Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne* n*, dla których* $n^2 + 3n + 4$ *jest liczbą podzielną przez* 49.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$n^2 + 3n + 4 = (n-2)(n+5) + 14. \tag{1}$$

Zatem, jeśli $49 | n^2 + 3n + 4$, to $7 | n^2 + 3n + 4$ i tym samym

$$7 | (n-2)(n+5). \tag{2}$$

Ponieważ 7 jest liczbą pierwszą, więc $7 | n-2$ lub $7 | n+5$. Liczby $n-2$, $n+5$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 7. To znaczy, że jeśli jedna z liczb $n-2$, $n+5$ jest podzielna przez 7, to druga też. Warunek (2) implikuje więc, że

$$49 | (n-2)(n+5). \tag{3}$$

Na podstawie warunków (1) i (3) wnioskujemy, że gdyby liczba $n^2 + 3n + 4$ była podzielna przez 49, to 14 dzieliłoby się przez 49.

Zatem nie ma takiej liczby naturalnej n, że $49 | n^2 + 3n + 4$.

2. *Dany jest czworokąt wypukły* $ABCD$ *o polu 1. Jego przekątne przecinają się pod kątem* $60°$*. Niech* K, M *będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków* A, C *na prostą* l_{BD} *i punkty* N, L *będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków* B, D *na prostą* l_{AC}*. Obliczyć pole czworokąta* $KLMN$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Bez straty ogólności rozwiązania możemy przyjąć, że to kąt $\sphericalangle APB$ ma miarę $60°$. Wówczas w trójkącie $\triangle APK$ mamy $|\sphericalangle AKP| = 90°$ oraz $|\sphericalangle PAK| = 30°$. Zatem

$$|PK| = \frac{1}{2}|PA|.$$

Analogicznie, biorąc trójkąty $\triangle PNB$, $\triangle PMC$ i $\triangle PLD$, zauważamy, że

$$|PN| = \frac{1}{2}|PB|, \quad |PM| = \frac{1}{2}|PC|, \quad |PL| = \frac{1}{2}|PD|.$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned}
S_{KLMN} = \frac{1}{2}\sin 60°|PN|\,|PK| + \frac{1}{2}\sin 120°|PK|\,|PL| +& \\
\frac{1}{2}\sin 60°|PL|\,|PM| + \frac{1}{2}\sin 120°|PM|\,|PN| =& \\
\frac{1}{2}\sin 60° \left(|PN|\,|PK| + |PK|\,|PL| + |PL|\,|PM| + |PM|\,|PN|\right) =& \\
\frac{1}{2}\sin 60° \left(\frac{1}{4}|PB|\,|PA| + \frac{1}{4}|PA|\,|PD| + \frac{1}{4}|PD|\,|PC| + \frac{1}{4}|PC|\,|PB|\right) =& \\
\frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}.&
\end{aligned}$$