XLVII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

25. 03. 2006

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* **lub** *NIE* **w miejscu zaznaczonym kropkami.**

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n, suma n początkowych wyrazów ciągu $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ...)$ określona jest wzorem $S_n = 5n^2 - 3n + 3$. Wtedy

NIE ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym
NIE ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym
TAK ciąg $(b_n) = (b_1, b_2, b_3, ...)$, gdzie $b_n = 3^{a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$, jest ciągiem geometrycznym

2. Równanie $|x^2 + ax + b| = 2$ ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3, gdzie $x_1 < x_2 < x_3$. Wówczas

NIE $x_3 > 0$
TAK $2x_2 = x_1 + x_3$
TAK $x_3 - x_1 = 4$

3. Łącząc środki kolejnych boków czworokąta wypukłego $ABCD$ otrzymano prostokąt. Zatem

NIE czworokąt $ABCD$ jest rombem
NIE czworokąt $ABCD$ jest trapezem
NIE czworokąt $ABCD$ jest deltoidem

4. Trójkąt prostokątny jest wpisany w okrąg o promieniu 2. Wówczas co najmniej jeden bok tego trójkąta

NIE ma długość niewymierną
TAK ma długość większą od 3
TAK ma długość mniejszą niż 3

5. Istnieją takie liczby niewymierne $a,\ b$, że

TAK liczba $a+2b$ jest wymierna
TAK liczby $a+b$ i $a\cdot b$ są wymierne
NIE liczby $a+2b$ i $2a+5b$ są wymierne

6. Niech $x_1,\ x_2$ będą rzeczywistymi pierwiastkami równania $x^2+(m-2)x-3m+1=0$ z parametrem $m\in\mathbb{R}$. Wówczas

TAK jeżeli $m<-9$, to $x_1>0$ i $x_2>0$
TAK $x_1^2+x_2^2=(m+1)^2+1$
NIE suma $x_1^2+x_2^2$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $m=-1$

7. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x przez $\lfloor x\rfloor_2$ oznaczmy największą parzystą liczbę całkowitą nie większą niż x (*podłoga parzysta*). $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas

TAK $\lfloor x\rfloor_2=2\left[\frac{x}{2}\right]$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$
TAK $\lfloor x\rfloor_2=\lfloor x-1\rfloor_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[x]$ jest liczbą nieparzystą
NIE $\lfloor 2x\rfloor_2=[2x]$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$

8. Dla dowolnej liczby naturalnej $n\in\mathbb{N}$ ($n\geqslant 1$) określamy funkcję $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorem $f_n(x)=\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})+...+\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$. Wówczas

NIE dla każdej liczby naturalnej n funkcja f_n jest parzysta
TAK dla pewnej liczby naturalnej n funkcja f_n jest funkcją wielomianową
TAK dla dowolnych $n\in\mathbb{N}$ i $x\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f_n(x)|<\frac{3}{2}$

9. Ciąg arytmetyczny $(a_1,a_2,a_3,...)$ nazwiemy *kompatybilnym* z ciągiem arytmetycznym $(b_1,b_2,b_3,...)$ i będziemy pisać $(a_n)\lhd(b_n)$, gdy ciąg $(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...)$ również jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas

NIE jeżeli $(a_n)\lhd(b_n)$, to $(b_n)\lhd(a_n)$
NIE jeżeli $(a_n)\lhd(b_n)$ i $(b_n)\lhd(c_n)$, to $(a_n)\lhd(c_n)$
TAK istnieje taki ciąg arytmetyczny (a_n), że $(a_n)\lhd(a_n)$

10. Wielomian $x^{2006}-2006x-1$

NIE nie ma pierwiastków rzeczywistych
TAK ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste
TAK ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny

11. Dla $x\in\mathbb{R}$ symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową x tzn. $\{x\}=x-[x]$. Wówczas dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$

TAK $\{a+b\}-\{a\}-\{b\}\leqslant 0$
NIE $\{a\cdot b\}=\{a\}\cdot\{b\}$
TAK $\{[a]\}=[\{a\}]$

12. Układ równań z parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} |x-y| + |x+y| = 2 \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

NIE ma dokładnie cztery rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$

NIE ma przy pewnym a więcej niż 12 rozwiązań

TAK przy pewnym a ma dokładnie 8 rozwiązań

13. Dany jest trójkąt $\mathcal{T}$, który ma boki o długościach a, b, c oraz trójkąt $\mathcal{T}'$ o bokach długości a', b', c', przy czym $\max\{a, b, c\} < \min\{a', b', c'\}$. Wówczas

NIE pole trójkąta $\mathcal{T}$ jest mniejsze niż pole trójkąta $\mathcal{T}'$

NIE promień okręgu opisanego na trójkącie $\mathcal{T}$ jest mniejszy niż promień okręgu opisanego na $\mathcal{T}'$

NIE istnieje taki przystający do $\mathcal{T}'$ trójkąt $\mathcal{T}_1$, że $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$

14. Wykres funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ przecina oś Oy w punkcie $(0, 2)$, a oś Ox w punktach $(3, 0)$, $(k, 0)$ $(k \neq 3)$. Wówczas

TAK $ak > 0$

TAK jeżeli k jest liczbą wymierną, to a też jest liczbą wymierną

TAK jeżeli k jest liczbą całkowitą parzystą, to $\frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą

15. Wykresy dwóch trójmianów kwadratowych $f(x) = ax^2 + bx + c$ i $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ ($aa' \neq 0$) mają dokładnie jeden punkt wspólny. Wówczas

NIE $a = a'$

NIE $aa' > 0$

TAK jeżeli $aa' < 0$, to $(b - b')^2 = 4(c - c')(a - a')$

16. Wykres funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma oś symetrii będącą prostą o równaniu $ax + by + c = 0$. Wówczas

NIE $b \neq 0$

NIE $a \neq 0$

NIE jeżeli $ab \neq 0$, to dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$

17. Liczbę naturalną nazwiemy *skierowaną*, gdy jej cyfry dziesiętne (biorąc od lewej do prawej) tworzą ciąg nierosnący. Wówczas

NIE suma liczb skierowanych jest liczbą skierowaną

TAK są 54 dwucyfrowe liczby skierowane

NIE dla dowolnego $n \geqslant 2$ liczb skierowanych n-cyfrowych jest więcej niż naturalnych liczb n-cyfrowych, które nie są skierowane

18. Dla danego trójkąta $\mathcal{T} = \triangle ABC$ przez $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ oznaczmy punkty przecięcia odpowiednio dwusiecznych kątów $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ z okręgiem opisanym na trójkącie $\mathcal{T}$. Trójkąt $\triangle \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ oznaczmy $\overline{\mathcal{T}}$. Wówczas

TAK istnieje taki trójkąt $\mathcal{T}$, że $\overline{\left(\overline{\mathcal{T}}\right)} = \mathcal{T}$
TAK jeżeli $|\sphericalangle A| = 50°$, to $|\sphericalangle \overline{A}| = 65°$
NIE istnieje taki trójkąt $\mathcal{T}$, dla którego $\overline{\mathcal{T}}$ jest trójkątem prostokątnym

19. Dane są liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, ..., a_{2006}$ takie, że jedynymi dzielnikami pierwszymi każdej z nich są liczby ze zbioru $\{2, 3, 5\}$ oraz $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2006}$. Wówczas

NIE $a_{2006} \geqslant 2^{2005}$
NIE średnia geometryczna tych liczb jest większa od 2^{1002}
TAK istnieją dwie liczby a_k, a_l ($1 \leqslant k < l \leqslant 2006$) takie, że iloczyn $a_k \cdot a_l$ jest kwadratem liczby naturalnej

20. Podzbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 + y^3 = 1\}$ płaszczyzny z prostokątnym układem współrzędnych ma

TAK z każdą prostą o równaniu $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$ dokładnie jeden punkt wspólny
TAK z prostą o równaniu $x + y = \frac{1}{2}$ dokładnie dwa punkty wspólne
TAK oś symetrii