XLVII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

25. 03. 2006

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n, suma n początkowych wyrazów ciągu $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ...)$ określona jest wzorem $S_n = 5n^2 - 3n + 3$. Wtedy

.... ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym
.... ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym
.... ciąg $(b_n) = (b_1, b_2, b_3, ...)$, gdzie $b_n = 3^{a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$, jest ciągiem geometrycznym

2. Równanie $|x^2 + ax + b| = 2$ ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3, gdzie $x_1 < x_2 < x_3$. Wówczas

.... $x_3 > 0$
.... $2x_2 = x_1 + x_3$
.... $x_3 - x_1 = 4$

3. Łącząc środki kolejnych boków czworokąta wypukłego $ABCD$ otrzymano prostokąt. Zatem

.... czworokąt $ABCD$ jest rombem
.... czworokąt $ABCD$ jest trapezem
.... czworokąt $ABCD$ jest deltoidem

4. Trójkąt prostokątny jest wpisany w okrąg o promieniu 2. Wówczas co najmniej jeden bok tego trójkąta

.... ma długość niewymierną
.... ma długość większą od 3
.... ma długość mniejszą niż 3

5. Istnieją takie liczby niewymierne $a,\ b$, że

.... liczba $a+2b$ jest wymierna
.... liczby $a+b$ i $a\cdot b$ są wymierne
.... liczby $a+2b$ i $2a+5b$ są wymierne

6. Niech $x_1,\ x_2$ będą rzeczywistymi pierwiastkami równania $x^2+(m-2)x-3m+1=0$ z parametrem $m\in\mathbb{R}$. Wówczas

.... jeżeli $m<-9$, to $x_1>0$ i $x_2>0$
.... $x_1^2+x_2^2=(m+1)^2+1$
.... suma $x_1^2+x_2^2$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $m=-1$

7. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x przez $\lfloor x\rfloor_2$ oznaczmy największą parzystą liczbę całkowitą nie większą niż x (*podłoga parzysta*). $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wówczas

.... $\lfloor x\rfloor_2=2\left[\frac{x}{2}\right]$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$
.... $\lfloor x\rfloor_2=\lfloor x-1\rfloor_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[x]$ jest liczbą nieparzystą
.... $\lfloor 2x\rfloor_2=[2x]$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$

8. Dla dowolnej liczby naturalnej $n\in\mathbb{N}$ ($n\geqslant 1$) określamy funkcję $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorem $f_n(x)=\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})+\ldots+\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$. Wówczas

.... dla każdej liczby naturalnej n funkcja f_n jest parzysta
.... dla pewnej liczby naturalnej n funkcja f_n jest funkcją wielomianową
.... dla dowolnych $n\in\mathbb{N}$ i $x\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f_n(x)|<\frac{3}{2}$

9. Ciąg arytmetyczny $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ nazwiemy *kompatybilnym* z ciągiem arytmetycznym $(b_1,b_2,b_3,\ldots)$ i będziemy pisać $(a_n)\lhd(b_n)$, gdy ciąg $(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\ldots)$ również jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas

.... jeżeli $(a_n)\lhd(b_n)$, to $(b_n)\lhd(a_n)$
.... jeżeli $(a_n)\lhd(b_n)$ i $(b_n)\lhd(c_n)$, to $(a_n)\lhd(c_n)$
.... istnieje taki ciąg arytmetyczny (a_n), że $(a_n)\lhd(a_n)$

10. Wielomian $x^{2006}-2006x-1$

.... nie ma pierwiastków rzeczywistych
.... ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste
.... ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny

11. Dla $x\in\mathbb{R}$ symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową x tzn. $\{x\}=x-[x]$. Wówczas dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$

.... $\{a+b\}-\{a\}-\{b\}\leqslant 0$
.... $\{a\cdot b\}=\{a\}\cdot\{b\}$
.... $\{[a]\}=[\{a\}]$

12. Układ równań z parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2 \\ |x|+|y|=a \end{cases}$$

.... ma dokładnie cztery rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $a=1$
.... ma przy pewnym a więcej niż 12 rozwiązań
.... przy pewnym a ma dokładnie 8 rozwiązań

13. Dany jest trójkąt $\mathcal{T}$, który ma boki o długościach a, b, c oraz trójkąt $\mathcal{T}'$ o bokach długości a', b', c', przy czym $\max\{a,b,c\} < \min\{a',b',c'\}$. Wówczas
.... pole trójkąta $\mathcal{T}$ jest mniejsze niż pole trójkąta $\mathcal{T}'$
.... promień okręgu opisanego na trójkącie $\mathcal{T}$ jest mniejszy niż promień okręgu opisanego na $\mathcal{T}'$
.... istnieje taki przystający do $\mathcal{T}'$ trójkąt $\mathcal{T}_1$, że $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$

14. Wykres funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ przecina oś Oy w punkcie $(0,2)$, a oś Ox w punktach $(3,0)$, $(k,0)$ ($k\neq 3$). Wówczas
.... $ak>0$
.... jeżeli k jest liczbą wymierną, to a też jest liczbą wymierną
.... jeżeli k jest liczbą całkowitą parzystą, to $\frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą

15. Wykresy dwóch trójmianów kwadratowych $f(x)=ax^2+bx+c$ i $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ ($aa'\neq 0$) mają dokładnie jeden punkt wspólny. Wówczas
.... $a=a'$
.... $aa'>0$
.... jeżeli $aa'<0$, to $(b-b')^2=4(c-c')(a-a')$

16. Wykres funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma oś symetrii będącą prostą o równaniu $ax+by+c=0$. Wówczas
.... $b\neq 0$
.... $a\neq 0$
.... jeżeli $ab\neq 0$, to dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$

17. Liczbę naturalną nazwiemy *skierowaną*, gdy jej cyfry dziesiętne (biorąc od lewej do prawej) tworzą ciąg nierosnący. Wówczas
.... suma liczb skierowanych jest liczbą skierowaną
.... są 54 dwucyfrowe liczby skierowane
.... dla dowolnego $n\geqslant 2$ liczb skierowanych n-cyfrowych jest więcej niż naturalnych liczb n-cyfrowych, które nie są skierowane

18. Dla danego trójkąta $\mathcal{T} = \triangle ABC$ przez $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ oznaczmy punkty przecięcia odpowiednio dwusiecznych kątów $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ z okręgiem opisanym na trójkącie $\mathcal{T}$. Trójkąt $\triangle \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ oznaczmy $\overline{\mathcal{T}}$. Wówczas

.... istnieje taki trójkąt $\mathcal{T}$, że $\overline{\left(\overline{\mathcal{T}}\right)} = \mathcal{T}$
.... jeżeli $|\sphericalangle A| = 50°$, to $|\sphericalangle \overline{A}| = 65°$
.... istnieje taki trójkąt $\mathcal{T}$, dla którego $\overline{\mathcal{T}}$ jest trójkątem prostokątnym

19. Dane są liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, ..., a_{2006}$ takie, że jedynymi dzielnikami pierwszymi każdej z nich są liczby ze zbioru $\{2, 3, 5\}$ oraz $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2006}$. Wówczas

.... $a_{2006} \geqslant 2^{2005}$
.... średnia geometryczna tych liczb jest większa od 2^{1002}
.... istnieją dwie liczby a_k, a_l ($1 \leqslant k < l \leqslant 2006$) takie, że iloczyn $a_k \cdot a_l$ jest kwadratem liczby naturalnej

20. Podzbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 + y^3 = 1\}$ płaszczyzny z prostokątnym układem współrzędnych ma

.... z każdą prostą o równaniu $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$) dokładnie jeden punkt wspólny
.... z prostą o równaniu $x + y = \frac{1}{2}$ dokładnie dwa punkty wspólne
.... oś symetrii

2. ZADANIA TEKSTOWE

Każde z zadań tekstowych punktowane jest w skali od 0 do 10 punktów.

1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $n^2 + 3n + 4$ jest liczbą podzielną przez 49.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Jego przekątne przecinają się pod kątem $60°$. Niech K, M będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków A, C na prostą l_{BD} i punkty N, L będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków B, D na prostą l_{AC}. Obliczyć pole czworokąta $KLMN$.

P O W O D Z E N I A!