XLVIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Rozwiązania zadań tekstowych.

1. *Wewnątrz równoległoboku* $ABCD$ *dany jest taki punkt* P*, że*

$$m(\sphericalangle APB) + m(\sphericalangle CPD) = 180^\circ.$$

Udowodnić, że $m(\sphericalangle PBC) = m(\sphericalangle PDC)$*.*

Rozwiązanie. Wybieramy taki punkt P', że $AP'PD$ jest równoległobokiem. Wtedy $BCPP'$ też jest równoległobokiem i trójkąt $\triangle DPC$ jest przystający do trójkąta $\triangle AP'B$. Więc

$$m(\sphericalangle APB) + m(\sphericalangle AP'B) = m(\sphericalangle APB) + m(\sphericalangle DPC) = 180^\circ,$$

co znaczy, że czworokąt $AP'BP$ jest wpisywalny w okrąg. Zatem

$$m(\sphericalangle PDC) = m(\sphericalangle P'AB) = m(\sphericalangle P'PB) = m(\sphericalangle CBP).$$

2. *Niech* $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$*. Dowolnemu ciągowi* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *liczb* $0, 1, 2, \dots, n-1$ *przyporządkowujemy ciąg* $\mathbf{a}' = (a_1', a_2', \dots, a_n')$ *dany przez*

$a_i' =$ *reszta z dzielenia* $a_i + i - 1$ *przez* n*.*

Ciąg $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *nazwiemy ciekawym, gdy* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{a}'$ *są permutacjami liczb* $0, 1, 2, \dots, n-1$*. Dowieść, że ciąg ciekawy długości* n *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* n *jest liczbą nieparzystą.*

Rozwiązanie. Niech $n = 2k+1$ będzie liczbą naturalną nieparzystą. Wówczas ciąg $\mathbf{a} = (0, 1, 2, 3, \dots, 2k)$ jest ciekawy. Istotnie, kolejne wyrazy ciągu $\mathbf{a}'$ są resztami z dzielenia przez n liczb $0, 2, 4, ..., 4k$ i reszty te sa różne, gdyż n jest względnie pierwsza z 2. Zatem $\mathbf{a}'$ jest permutacją.

Załóżmy teraz, że $n = 2^s k$, gdzie $s \geqslant 1$ i 2 nie dzieli k. Niech $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ będzie pewną permutacją liczb $0, 1, 2, \dots, n-1$ i przypuśćmy, że $\mathbf{a}'$ też jest permutacją. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + (i-1)) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} j = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2^s k (2^s k - 1).$$

Jednocześnie

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' = \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = 2^{s-1} k (2^s k - 1)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_i + (i-1)) \pmod{n}.$$

Zatem

$$2^{s-1} k (2^s k - 1) \equiv 2^s k (2^s k - 1) \pmod{2^s k},$$

więc

$$2^{s-1} k (2^s k - 1) \equiv 0 \pmod{2^s k},$$

czyli sprzeczność.