XLVIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

1. TEST

1. Część wspólna wypukłego pięciokąta i wypukłego ośmiokąta na płaszczyźnie

TAK może być trójkątem
NIE może być wielokątem niewypukłym
TAK może być jedenastokątem

2. Największą wartością funkcji $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest M_i, a najmniejszą wartością jest m_i, $i \in \{1,2,3\}$. Wówczas

NIE największą wartością funkcji $f_1 + f_2 + f_3$ jest $M_1 + M_2 + M_3$
NIE największą wartością funkcji $f_1 \cdot f_2$ jest $M_1 \cdot M_2$
NIE najmniejszą wartością funkcji $f_1 - f_2$ jest $m_1 - M_2$

3. Prostokątna szachownica ma 2007 wierszy i 6 kolumn. W każdym jej polu stoi liczba całkowita dodatnia. Sumy liczb z każdego wiersza są równe i wynoszą 11. Wówczas

TAK istnieją dwa takie same wiersze
TAK suma liczb w każdej kolumnie jest mniejsza niż 12043
NIE istnieje kolumna, w której suma liczb jest większa niż 3680

4. Liczby $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$ dają różne reszty z dzielenia przez 11, a liczby $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ dają różne reszty z dzielenia przez 7. Zatem

NIE liczby $6, 6^2, 6^3, \ldots, 6^{60}$ dają różne reszty z dzielenia przez 77

TAK liczba 2^{2007} daje resztę 7 z dzielenia przez przez 11

TAK liczba 3^{2007} daje resztę 6 z dzielenia przez 7

5. Niech $\mathcal{A}_r$ oznacza zbiór wszystkich dziesięciowyrazowych ciągów arytmetycznych (a_n) o różnicy r i wyrazach całkowitych spełniajacych nierówności $1 \leqslant a_k \leqslant 100$. Wówczas

NIE zbiór $\mathcal{A}_{10}$ jest zbiorem pustym
TAK zbiór $\mathcal{A}_2$ ma 82 elementy
TAK wszystkie zbiory $\mathcal{A}_r$ mają w sumie 1112 elementów

6. Niech $\langle x \rangle$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej; np. $\langle \pi \rangle = \pi - 3$, $\langle \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle -\frac{4}{3} \rangle = \frac{1}{3}$. Wówczas

NIE $\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$

NIE $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2$

TAK równanie $4\langle x \rangle = x$ ma dokładnie cztery rozwiązania

7. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Niech m_a oznacza długość środkowej, d_a - długość dwusiecznej, h_a - długość wysokości wychodzących z wierzchołka A tego trójkąta. Wówczas

TAK $m_a \geqslant d_a \geqslant h_a$
TAK może być tak, że $m_a = 2d_a$ i $d_a = 2h_a$
TAK istnieje tylko jeden z dokładnością do przystawania trójkąt, dla którego $m_a = 2007$, $d_a = 2$, $h_a = 1$

8. Niech k_r oznacza liczbę punktów kratowych (tzn. o obu współrzędnych całkowitych) w zbiorze $\{(x, y) :\ |x| + |y| \leqslant r\}$. Wówczas

TAK k_r jest liczbą nieparzystą dla każdego $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
NIE ciąg $(k_0, k_1, k_2, k_3, \dots)$ jest ciągiem arytmetycznym
TAK ciąg $(k_1 - k_0, k_2 - k_1, k_3 - k_2, \dots)$ jest ciągiem arytmetycznym

9. Niech punkt X będzie takim punktem wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$, że pola trójkątów $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, $\triangle CAX$ są równe. Wówczas

TAK taki punkt X istnieje w każdym trójkącie
TAK w każdym trójkącie istnieje co najwyżej jeden taki punkt X
NIE prosta l_{AX} jest dwusieczną kąta $\sphericalangle A$

10. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_2$ zbiór wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Jeżeli $\alpha = a + b\sqrt{2} \in \mathcal{F}_2$, to oznaczmy $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{2}$. Wówczas

TAK dla każdego $\alpha \in \mathcal{F}_2$ liczba $\alpha^{2007} + \overline{\alpha}^{2007}$ jest liczbą całkowitą
TAK dla każdego $\alpha \in \mathcal{F}_2$ liczba $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ jest liczbą całkowitą
TAK jeżeli $\alpha \in \mathcal{F}_2$ jest liczbą wymierną, to $\alpha - \overline{\alpha} = 0$

11. Dla dowolnego ciągu $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ określamy dwa ciągi: (s_n) i (d_n), gdzie

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad d_n = a_{n+1} - a_n \ \ (n \in \{1, 2, 3, \dots\}).$$

Ciąg (s_n) nazywamy *całką ciągu* (a_n), ciąg (d_n) nazywamy *pochodną ciągu* (a_n). Wówczas

TAK ciąg (a_n) jest ściśle malejący wtedy i tylko wtedy, gdy $d_n < 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$
NIE pochodna całki ciągu (a_n) równa jest ciągowi (a_n)
NIE całka pochodnej ciągu (a_n) równa jest ciągowi (a_n)

12. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. Jeżeli zbiór $A = \{(x, y) :\ y \geqslant x^3 \text{ oraz } y \geqslant (x-1)^2 + a\}$ na płaszczyźnie jest zbiorem wypukłym, to

NIE a może być dowolną liczbą rzeczywistą
TAK $a \geqslant -3$
TAK $a \geqslant -1$

13. Niech r_n oznacza resztę z dzielenia liczby 2^n przez liczbę 1003. Wówczas

TAK $r_{20} = 441$
NIE $r_{14} > r_{16}$
NIE $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{1003})$ jest ciągiem różnowartościowym

14. Mówimy, że trójkąt $\triangle ABC$ jest *prawie podobny* do trójkąta $\triangle A'B'C'$ i piszemy $\triangle ABC \ltimes \triangle A'B'C'$, gdy $|m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle A')| < 1^\circ$, $|m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle B')| < 1^\circ$ oraz $|m(\sphericalangle C) - m(\sphericalangle C')| < 1^\circ$. Wówczas

TAK jeśli $\triangle ABC \ltimes \triangle A'B'C'$, to $\triangle A'B'C' \ltimes \triangle ABC$
NIE jeśli $\triangle ABC \ltimes \triangle A'B'C'$ i $\triangle A'B'C' \ltimes \triangle A''B''C''$, to $\triangle ABC \ltimes \triangle A''B''C''$
TAK dla dowolnego trójkąta $\triangle ABC$ istnieje na płaszczyźnie trójkąt kratowy (tzn. o wierzchołkach w punktach o obu współrzędnych całkowitych), który jest prawie podobny do trójkąta $\triangle ABC$

15. Wielomian $W(X)$ o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunek

$$|W(x) - W(y)| \geqslant |x - y|$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

TAK wielomian $W(X)$ ma co najmniej jeden pierwiastek
NIE wielomian $W(X)$ może mieć dwa różne pierwiastki
NIE stopień wielomianu $W(X)$ jest równy 1

16. Wiadomo, że $\frac{1}{19} = 0,(052631578947368421)$ (okresowy ułamek dziesiętny). Zatem

TAK $\frac{2007}{19} = 105,(631578947368421052)$
NIE 10^9 daje resztę 1 z dzielenia przez 19
NIE $\frac{2}{19} = 0,(1052)$

17. Prosta k przechodzi przez punkt $P = (0,1)$ i przecina wykres funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ w różnych punktach A i B. Niech $O = (0,0)$. Wówczas

TAK trójkąt $\triangle AOB$ jest prostokątny
NIE pole trójkąta $\triangle AOB$ nie zależy od wyboru prostej k
NIE $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru prostej k

18. Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez C_n liczbę $\binom{2n}{n}$. Wówczas

TAK C_n jest liczbą parzystą dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
NIE ciąg (a_n) dany przez $a_n = n^{-2} C_n$ ($n \in \mathbb{N}$) jest ciągiem ograniczonym
NIE ciąg (b_n) dany przez $b_n = 2^{-n} C_n$ ($n \in \mathbb{N}$) jest ciągiem ograniczonym

19. Liczby rzeczywiste α, β, γ są pierwiastkami równania $x^3 - 2x + 1 = 0$. Wówczas

TAK $\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} = 2$
NIE $(\alpha\beta)^{-1} + (\beta\gamma)^{-1} + (\gamma\alpha)^{-1} = 3$
TAK $\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2} = 4$

20. Dany jest sześcian $\mathcal{S}$. Przez $P(n)$ oznaczmy zbiór wszystkich płaszczyzn przechodzących przez dokładnie n wierzchołków sześcianu $\mathcal{S}$. Wówczas

NIE $P(3)$ ma 56 elementów
NIE $P(4)$ ma 8 elementów
TAK $P(5)$ jest zbiorem pustym