XLVIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

$24.03.2007$

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Część wspólna wypukłego pięciokąta i wypukłego ośmiokąta na płaszczyźnie

.... może być trójkątem
.... może być wielokątem niewypukłym
.... może być jedenastokątem

2. Największą wartością funkcji $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest M_i, a najmniejszą wartością jest m_i, $i \in \{1,2,3\}$. Wówczas

.... największą wartością funkcji $f_1 + f_2 + f_3$ jest $M_1 + M_2 + M_3$
.... największą wartością funkcji $f_1 \cdot f_2$ jest $M_1 \cdot M_2$
.... najmniejszą wartością funkcji $f_1 - f_2$ jest $m_1 - M_2$

3. Prostokątna szachownica ma 2007 wierszy i 6 kolumn. W każdym jej polu stoi liczba całkowita dodatnia. Sumy liczb z każdego wiersza są równe i wynoszą 11. Wówczas

.... istnieją dwa takie same wiersze
.... suma liczb w każdej kolumnie jest mniejsza niż 12043
.... istnieje kolumna, w której suma liczb jest większa niż 3680

4. Liczby $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$ dają różne reszty z dzielenia przez 11, a liczby $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ dają różne reszty z dzielenia przez 7. Zatem

.... liczby $6, 6^2, 6^3, \ldots, 6^{60}$ dają różne reszty z dzielenia przez 77
.... liczba 2^{2007} daje resztę 7 z dzielenia przez przez 11
.... liczba 3^{2007} daje resztę 6 z dzielenia przez 7

5. Niech $\mathcal{A}_r$ oznacza zbiór wszystkich dziesięciowyrazowych ciągów arytmetycznych (a_n) o różnicy r i wyrazach całkowitych spełniajacych nierówności $1 \leqslant a_k \leqslant 100$. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}_{10}$ jest zbiorem pustym
.... zbiór $\mathcal{A}_2$ ma 82 elementy
.... wszystkie zbiory $\mathcal{A}_r$ mają w sumie 1112 elementów

6. Niech $\langle x\rangle$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej; np. $\langle \pi\rangle = \pi - 3$, $\langle \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle -\frac{4}{3}\rangle = \frac{1}{3}$. Wówczas

.... $\langle x+y\rangle = \langle x\rangle + \langle y\rangle$

.... $\langle x^2\rangle = \langle x\rangle^2$

.... równanie $4\langle x\rangle = x$ ma dokładnie cztery rozwiązania

7. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Niech m_a oznacza długość środkowej, d_a - długość dwusiecznej, h_a - długość wysokości wychodzących z wierzchołka A tego trójkąta. Wówczas

.... $m_a \geqslant d_a \geqslant h_a$
.... może być tak, że $m_a = 2d_a$ i $d_a = 2h_a$
.... istnieje tylko jeden z dokładnością do przystawania trójkąt, dla którego $m_a = 2007$, $d_a = 2$, $h_a = 1$

8. Niech k_r oznacza liczbę punktów kratowych (tzn. o obu współrzędnych całkowitych) w zbiorze $\{(x,y) : |x| + |y| \leqslant r\}$. Wówczas

.... k_r jest liczbą nieparzystą dla każdego $r \in \{0,1,2,3,\dots\}$
.... ciąg $(k_0, k_1, k_2, k_3, \dots)$ jest ciągiem arytmetycznym
.... ciąg $(k_1 - k_0, k_2 - k_1, k_3 - k_2, \dots)$ jest ciągiem arytmetycznym

9. Niech punkt X będzie takim punktem wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$, że pola trójkątów $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, $\triangle CAX$ są równe. Wówczas

.... taki punkt X istnieje w każdym trójkącie
.... w każdym trójkącie istnieje co najwyżej jeden taki punkt X
.... prosta l_{AX} jest dwusieczną kąta $\sphericalangle A$

10. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_2$ zbiór wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Jeżeli $\alpha = a + b\sqrt{2} \in \mathcal{F}_2$, to oznaczmy $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{2}$. Wówczas

.... dla każdego $\alpha \in \mathcal{F}_2$ liczba $\alpha^{2007} + \overline{\alpha}^{2007}$ jest liczbą całkowitą
.... dla każdego $\alpha \in \mathcal{F}_2$ liczba $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ jest liczbą całkowitą
.... jeżeli $\alpha \in \mathcal{F}_2$ jest liczbą wymierną, to $\alpha - \overline{\alpha} = 0$

11. Dla dowolnego ciągu $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ określamy dwa ciągi: (s_n) i (d_n), gdzie

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad d_n = a_{n+1} - a_n \ \ (n \in \{1, 2, 3, \dots\}).$$

Ciąg (s_n) nazywamy *całką ciągu* (a_n), ciąg (d_n) nazywamy *pochodną ciągu* (a_n). Wówczas

.... ciąg (a_n) jest ściśle malejący wtedy i tylko wtedy, gdy $d_n < 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$
.... pochodna całki ciągu (a_n) równa jest ciągowi (a_n)
.... całka pochodnej ciągu (a_n) równa jest ciągowi (a_n)

12. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. Jeżeli zbiór $A = \{(x, y) : \, y \geqslant x^3$ oraz $y \geqslant (x-1)^2 + a\}$ na płaszczyźnie jest zbiorem wypukłym, to

.... a może być dowolną liczbą rzeczywistą
.... $a \geqslant -3$
.... $a \geqslant -1$

13. Niech r_n oznacza resztę z dzielenia liczby 2^n przez liczbę 1003. Wówczas

.... $r_{20} = 441$
.... $r_{14} > r_{16}$
.... $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_{1003})$ jest ciągiem różnowartościowym

14. Mówimy, że trójkąt $\triangle ABC$ jest *prawie podobny* do trójkąta $\triangle A'B'C'$ i piszemy $\triangle ABC \ltimes \triangle A'B'C'$, gdy $|m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle A')| < 1^\circ$, $|m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle B')| < 1^\circ$ oraz $|m(\sphericalangle C) - m(\sphericalangle C')| < 1^\circ$. Wówczas

.... jeśli $\triangle ABC \ltimes \triangle A'B'C'$, to $\triangle A'B'C' \ltimes \triangle ABC$
.... jeśli $\triangle ABC \ltimes \triangle A'B'C'$ i $\triangle A'B'C' \ltimes \triangle A''B''C''$, to $\triangle ABC \ltimes \triangle A''B''C''$
.... dla dowolnego trójkąta $\triangle ABC$ istnieje na płaszczyźnie trójkąt kratowy (tzn. o wierzchołkach w punktach o obu współrzędnych całkowitych), który jest prawie podobny do trójkąta $\triangle ABC$

15. Wielomian $W(X)$ o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunek

$$|W(x) - W(y)| \geqslant |x - y|$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

.... wielomian $W(X)$ ma co najmniej jeden pierwiastek
.... wielomian $W(X)$ może mieć dwa różne pierwiastki
.... stopień wielomianu $W(X)$ jest równy 1

16. Wiadomo, że $\frac{1}{19} = 0,(052631578947368421)$ (okresowy ułamek dziesiętny). Zatem

.... $\frac{2007}{19} = 105,(631578947368421052)$
.... 10^9 daje resztę 1 z dzielenia przez 19
.... $\frac{2}{19} = 0,(1052)$

17. Prosta k przechodzi przez punkt $P = (0,1)$ i przecina wykres funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ w różnych punktach A i B. Niech $O = (0,0)$. Wówczas

.... trójkąt $\triangle AOB$ jest prostokątny
.... pole trójkąta $\triangle AOB$ nie zależy od wyboru prostej k
.... $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru prostej k

18. Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez C_n liczbę $\binom{2n}{n}$. Wówczas

.... C_n jest liczbą parzystą dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
.... ciąg (a_n) dany przez $a_n = n^{-2}C_n$ ($n \in \mathbb{N}$) jest ciągiem ograniczonym
.... ciąg (b_n) dany przez $b_n = 2^{-n}C_n$ ($n \in \mathbb{N}$) jest ciągiem ograniczonym

19. Liczby rzeczywiste α, β, γ są pierwiastkami równania $x^3 - 2x + 1 = 0$. Wówczas

.... $\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} = 2$
.... $(\alpha\beta)^{-1} + (\beta\gamma)^{-1} + (\gamma\alpha)^{-1} = 3$
.... $\alpha^{-2} + \beta^{-2} + \gamma^{-2} = 4$

20. Dany jest sześcian $\mathcal{S}$. Przez $P(n)$ oznaczmy zbiór wszystkich płaszczyzn przechodzących przez dokładnie n wierzchołków sześcianu $\mathcal{S}$. Wówczas

.... $P(3)$ ma 56 elementów
.... $P(4)$ ma 8 elementów
.... $P(5)$ jest zbiorem pustym

2. ZADANIA TEKSTOWE

Każde z zadań tekstowych punktowane jest w skali od 0 do 10 punktów.

1. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ dany jest taki punkt P, że
$$m(\sphericalangle APB) + m(\sphericalangle CPD) = 180°.$$
Udowodnić, że $m(\sphericalangle PBC) = m(\sphericalangle PDC)$.

2. Niech $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dowolnemu ciągowi $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ liczb $0, 1, 2, \ldots, n-1$ przyporządkowujemy ciąg $\mathbf{a}' = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$ dany przez
$$a_i' = \text{reszta z dzielenia } a_i + i - 1 \text{ przez } n.$$
Ciąg $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazwiemy *ciekawym*, gdy $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}'$ są permutacjami liczb $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dowieść, że ciąg ciekawy długości n istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

P O W O D Z E N I A!