XLIX MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

08. 03. 2008

1. Rozwiązania zadań tekstowych.

1. *Niech* k *będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią i niech* $s_1, s_2, \ldots, s_k$ *będą dodatnimi liczbami wymiernymi spełniającymi warunek*

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_k = 1.$$

Funkcja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *określona jest wzorem*

$$f(n) = n - \lfloor s_1 n \rfloor - \lfloor s_2 n \rfloor - \ldots - \lfloor s_k n \rfloor.$$

Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji f.

Rozwiązanie. Wiadomo, że liczba $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ jest równa 0 lub 1 dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Stąd, przez oczywistą indukcję,

$$\lfloor x_1 + x_2 + \ldots + x_k \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor - \lfloor x_2 \rfloor - \ldots - \lfloor x_k \rfloor \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}.$$

Ponieważ $n = (s_1 + s_2 + \cdots + s_k)n$, więc, na mocy powyższego,

$$\begin{aligned} &n - \lfloor s_1 n \rfloor - \lfloor s_2 n \rfloor - \ldots - \lfloor s_k n \rfloor = \\ &\qquad \lfloor (s_1 + s_2 + \ldots + s_k)n \rfloor - \lfloor s_1 n \rfloor - \lfloor s_2 n \rfloor - \ldots - \lfloor s_k n \rfloor \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}. \end{aligned}$$

Niech teraz $s_i = \frac{a_i}{m}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, gdzie m jest wspólnym mianownikiem liczb wymiernych $s_1, \ldots, s_k$. Wówczas $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = m$.
Kładziemy $n = m$:

$$f(m) = m - \left\lfloor \frac{a_1}{m} m \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a_2}{m} m \right\rfloor - \ldots - \left\lfloor \frac{a_k}{m} m \right\rfloor = m - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = 0.$$

Kładziemy $n = m - 1$:

$$\begin{aligned} f(m-1) = m - 1 - \left\lfloor \frac{a_1}{m}(m-1) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a_2}{m}(m-1) \right\rfloor - \ldots - \left\lfloor \frac{a_k}{m}(m-1) \right\rfloor &= \\ m - 1 - \left(a_1 + \left\lfloor \frac{-a_1}{m} \right\rfloor \right) - \left(a_2 + \left\lfloor \frac{-a_2}{m} \right\rfloor \right) - \ldots - \left(a_k + \left\lfloor \frac{-a_k}{m} \right\rfloor \right) &= \\ -1 - \left(\left\lfloor \frac{-a_1}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-a_2}{m} \right\rfloor \ldots + \left\lfloor \frac{-a_k}{m} \right\rfloor \right) &= \\ -1 - (\underbrace{-1 - 1 - \ldots - 1}_{k \text{ krotnie}}) &= k - 1. \end{aligned}$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji f jest 0, zaś największą $k-1$.

2. *Dany jest równoległobok* $ABCD$ *o polu równym 1. Na odcinku* $\overline{AD}$ *wybrano punkty* E *i* F *tak, że* $|AE| = |EF| = |FD| = \frac{1}{3}|AD|$. *Przekątna* $\overline{DB}$ *przecina odcinki* $\overline{CE}, \overline{CF}$ *odpowiednio w punktach* M, K. *Oblicz pole trójkąta* MCK.

Rozwiązanie. Odcinki $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ są równoległe, więc na podstawie cechy kąt-kąt-kąt podobieństwa trójkątów dostajemy

$$\triangle EMD \sim \triangle CMB,$$

$$\triangle FKD \sim \triangle CKB.$$

Stąd

$$\frac{|DM|}{|MB|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{\frac{2}{3}|BC|}{|BC|} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{|DK|}{|KB|} = \frac{|DF|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{3}|BC|}{|BC|} = \frac{1}{3}.$$

Trójkąty $\triangle DKC, \triangle DMC, \triangle DBC$ mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C. Stąd mamy

$$\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle DMC}} = \frac{|DB|}{|DM|} = \frac{|DM| + |MB|}{|DM|} = 1 + \frac{|MB|}{|DM|} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle DKC}} = \frac{|DB|}{|DK|} = \frac{|DK| + |KB|}{|DK|} = 1 + \frac{|KB|}{|DK|} = 1 + 3 = 4.$$

Pole trójkąta $\triangle DBC$ jest równe $1/2$. Zatem

$$S_{\triangle MCK} = S_{\triangle DMC} - S_{\triangle DKC} = \frac{2}{5}S_{\triangle DBC} - \frac{1}{4}S_{\triangle DBC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{40}.$$