XLIX MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

$08.\,03.\,2008$

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* **lub** *NIE* **w miejscu zaznaczonym kropkami.**

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Dokładnie pięć wierzchołków sześcianu $\mathcal{S}$ pomalowano na czerwono. Wówczas

.... istnieje ściana, której wszystkie wierzchołki są pomalowane na czerwono
.... istnieje ściana, której dokładnie 3 wierzchołki są pomalowane na czerwono
.... istnieje łamana o długości 4, do której należą wszystkie czerwone wierzchołki sześcianu

2. Danych jest 12 różnych liczb naturalnych większych niż 13. Suma każdych trzech z tych liczb jest podzielna przez 5. Wówczas

.... każda z tych liczb jest podzielna przez 5
.... ilość tych spośród tych liczb, które są niepodzielne przez 5 jest podzielna przez 3
.... suma wszystkich tych liczb jest większa niż 2^9

3. Niech dla danej liczby rzeczywistej x symbol $\lfloor x\rfloor$ oznacza *podłogę* liczby x, a symbol $\lceil x\rceil$ oznacza *sufit* liczby x. Wówczas, dla dowolnych liczb $x,\ y\in\mathbb{R}$

.... $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor + 1$
.... $\lceil x+y\rceil \leqslant \lceil x\rceil + \lceil y\rceil$
.... $\lfloor -x\rfloor = -\lceil x\rceil$

4. Danych jest 2008 różnych punktów na płaszczyźnie. Wówczas

.... istnieje koło zawierające dokładnie dwa z tych punktów
.... istnieje koło zawierające dokładnie 2007 z tych punktów
.... jeżeli żadne trzy z tych punktów nie leżą na jednej prostej, to istnieje koło zawierające dokładnie 121 z tych punktów

5. Pole trójkąta $\triangle ABC$ o bokach długości $a,\ b,\ c$ równe jest iloczynowi $2abc$. Wówczas

.... taki trójkąt nie istnieje
.... promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt spełnia $r \leqslant 1$
.... jeżeli $\triangle A'B'C'$ ma pole równe $2a'b'c'$, to trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ są przystające

6. Istnieje czworościan, którego

.... dokładnie dwie ściany są trójkątami prostokątnymi
.... wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi
.... wszystkie ściany są trójkątami rozwartokątnymi

7. Łamaną $A_1A_2\dots A_k$ w przestrzeni nazwiemy *ortonormalną*, gdy każdy z odcinków ją tworzących ma długość 1 i kąty $\sphericalangle A_1A_2A_3, \sphericalangle A_2A_3A_4, \dots, \sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k$ są proste. Wówczas

.... jeżeli $A_1A_2A_3A_4A_5$ jest łamaną ortonormalną, to $|A_1A_5| = \sqrt{6}$
.... jeżeli $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jest łamaną ortonormalną, to A_1 może pokrywać się z A_6
.... jeżeli w łamanej ortonormalnej $A_1A_2A_3A_4A_5$ zachodzi $A_1 = A_5$, to punkty $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ leżą w jednej płaszczyźnie

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona jest przez

$$f(x) = \max\left(x,\ \frac{1}{x}\right)$$

dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Wówczas

.... f jest funkcją nieparzystą
.... równanie $2008f(x) = -1$ ma dokładnie dwa rozwiązania
.... nierówność $x \leqslant f(x)$ spełniona jest przez wszystkie liczby rzeczywiste x

9. Zbiór punktów płaszczyzny opisany w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych układem równań

$$\begin{cases} |x| + |x-2| = 2y \\ |x-1| + |x-3| = 2y \end{cases}$$

jest

.... zbiorem pustym
.... łamaną o długości 3
.... odcinkiem o końcach $(1,\ 1)$ i $(2,\ 1)$

10. Niech p oznacza liczbę pierwszą. Wówczas

.... $p + 117$ nie jest liczbą pierwszą
.... $p^2 + 5p - 6$ nie jest liczbą pierwszą
.... $8^p + 1$ może być liczbą pierwszą

11. Reszta z dzielenia wielomianu $X^{28} + X^3 + 1$ przez wielomian $X^3 - X$ jest

.... wielomianem stopnia 2
.... wielomianem, który nie ma pierwiastków rzeczywistych
.... wielomianem będącym funkcją parzystą

12. Liczby $p,\, q,\, r$ są liczbami pierwszymi, a trójkąt $\mathcal{T}$ o bokach długości $\sqrt{p},\, \sqrt{q},\, \sqrt{r}$ jest trójkątem prostokątnym. Wówczas

.... pqr jest liczbą parzystą
.... $\max(p,\, q,\, r) \leqslant 61$
.... kwadrat pola trójkąta $\mathcal{T}$ jest większy niż 2

13. Dwusieczne (czterech) kątów czworokąta wypukłego

.... mają punkt wspólny
.... mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe
.... mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe

14. Czworościan $\mathcal{C}_1$ ma wierzchołki $A_1,\, B_1,\, C_1$, i D_1 będące środkami ciężkości (odpowiednio) ścian $\triangle BCD,\, \triangle ACD,\, \triangle ABD$ i $\triangle ABC$ czworościanu $\mathcal{C}$ o wierzchołkach $A,\, B,\, C,\, D$. Wówczas stosunek

.... objętości $\mathcal{C}$ do objętości $\mathcal{C}_1$ wynosi 9
.... pola powierzchni $\mathcal{C}$ do pola powierzchni $\mathcal{C}_1$ wynosi 6
.... sumy długości krawędzi $\mathcal{C}$ do sumy długości krawędzi $\mathcal{C}_1$ wynosi 3

15. Prosta k przechodzi przez punkt A o prostokątnych współrzędnych $(\frac{3}{5},\, \frac{4}{5})$ i przez pewien punkt kratowy B (czyli punkt o obu współrzędnych całkowitych). Wówczas

.... prosta k przechodzi przez różny od B punkt kratowy
.... prosta k może tworzyć z osią odciętych kąt o mierze 30 stopni
.... jeżeli prosta k przechodzi przez punkt kratowy C różny od B, to $|BC| \geqslant 5$

16. W sześcianie o krawędzi 2 można

.... zmieścić koło o promieniu $\frac{5}{2}$
.... zmieścić koło o promieniu $\sqrt{\frac{3}{2}}$
.... zmieścić kwadrat o boku dłuższym niż 2

17. Dane są dwa ciągi geometryczne (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich. Wówczas

.... ciąg (c_n) dany przez $c_n = \max(a_n,\, b_n)$ jest ciągiem geometrycznym
.... ciąg (d_n) dany przez $d_n = a_n b_n$ może być ciągiem arytmetycznym
.... istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że ciąg (e_n) dany przez $e_n = \min(a_{k+n},\, b_{k+n})$ jest ciągiem geometrycznym

18. Równanie $\sin(x+m) = 2008 \sin x \cos m$ dla

.... pewnej wartości parametru m ma nieskończenie wiele rozwiązań
.... pewnej wartości parametru m nie ma rozwiązań
.... dla każdej wartości parametru m ma rozwiązania

19. Okrąg $\mathcal{K}$ zadany jest na płaszczyźnie kartezjańskiej przez warunek $x^2+y^2+2x+2y=0$, a okrąg $\mathcal{K}_a$ przez warunek $x^2+y^2-2ax-2ay=1-2a^2$ $(a \in \mathbb{R})$. Wówczas

.... dla $a=1$ okręgi te są styczne
.... istnieją dokładnie dwie wartości parametru a, dla których okręgi $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_a$ są styczne
.... istnieje a, dla którego $\mathcal{K}$ leży wewnątrz okręgu $\mathcal{K}_a$

20. Do każdej z 12 klas pewnego liceum uczęszcza ta sama, mniejsza niż 39, liczba uczniów. Pewnego dnia absencja w szkole wyniosła dokładnie 12 procent. Zatem

.... do tego liceum uczęszcza co najmniej 279 uczniów
.... rzeczonego dnia było dokładnie 33 nieobecnych
.... liczba dziewcząt w klasie III A jest inna niż liczba chłopców w tej klasie

2. ZADANIA TEKSTOWE

Każde z zadań tekstowych punktowane jest w skali od 0 do 10 punktów.

1. Niech k będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią i niech $s_1, s_2, \ldots, s_k$ będą dodatnimi liczbami wymiernymi spełniającymi warunek

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_k = 1.$$

Funkcja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona jest wzorem

$$f(n) = n - \lfloor s_1 n \rfloor - \lfloor s_2 n \rfloor - \ldots - \lfloor s_k n \rfloor.$$

Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji f.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ o polu równym 1. Na odcinku $\overline{AD}$ wybrano punkty E i F tak, że $|AE| = |EF| = |FD| = \frac{1}{3}|AD|$. Przekątna $\overline{DB}$ przecina odcinki $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ odpowiednio w punktach M, K. Oblicz pole trójkąta $\triangle MCK$.

Uwaga. Dla liczby rzeczywistej x symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza *podłogę* liczby x, to znaczy największą spośród takich liczb całkowitych k, że $k \leqslant x$. Natomiast $\lceil x \rceil$ oznacza *sufit* liczby x, to znaczy najmniejszą spośród takich liczb całkowitych l, że $x \leqslant l$.

P O W O D Z E N I A!