L MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Rozwiązania zadań tekstowych.

1. *W okręgu o promieniu* r *dane są dwie prostopadłe cięciwy* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *przecinające się w punkcie* K*. Uzasadnić, że pole koła ograniczonego tym okręgiem jest równe*

$$S = \frac{\pi}{4}(|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2).$$

R o z w i ą z a n i e (jedno z wielu). Oznaczmy $|AK| = a$, $|BK| = b$, $|CK| = c$, $|DK| = d$. Przyjmijmy, bez straty ogólności rozwiązania, że $a \geqslant b$ i $d \geqslant c$. Niech x, y oznaczają odpowiednio odległość środka okręgu od prostej AB, od prostej CD. Wówczas

$$|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$$
$$\left(\frac{a+b}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2} + x\right)^2 =$$
$$2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + x^2\right) = 2(r^2 + r^2) = 4r^2.$$

Stąd $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}(|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2)$.

2. *Uczeń może zaliczyć w ciągu jednego roku szkolnego jedną, dwie lub trzy kolejne klasy. Na ile sposobów uczeń ten może ukończyć dwunastoklasową szkołę?*

R o z w i ą z a n i e. Rozwiążemy zadanie ogólniejsze. Oznaczmy przez p_n ilość sposobów ukończenia szkoły n-klasowej. Jasne, że

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 4. \tag{1}$$

Załóżmy teraz, że $n \geq 4$. Zbiór wszystkich p_n sposobów ukończenia szkoły n-klasowej podzielmy na sumę trzech parami rozłącznych podzbiorów

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

gdzie przez A_k oznaczyliśmy zbiór takich sposobów ukończenia szkoły n-klasowej, w których w ostatnim roku nauki uczeń zalicza k klas, $k = 1, 2, 3$. Jasne, że

$$p_n = |A_1| + |A_2| + |A_3|. \tag{2}$$

(symbol $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A). Ponadto, chwila zastanowienia pozwala zauważyć, że

$$|A_1| = p_{n-1},\ |A_2| = p_{n-2},\ |A_3| = p_{n-3}.$$

Zatem, na mocy (2), ciąg (p_n) jest ciągiem rekurencyjnym (trzeciego rzędu) spełniającym równanie rekurencyjne

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}$$

i mającym wartości początkowe (1). Stąd mamy jego kolejne wartości:

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 13,\ 24,\ 44,\ 81,\ 149,\ 274,\ 504,\ 927,\ \ldots$$

Ostatecznie $p_{12} = 927$.