L MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

28. 03. 2009

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. TEST

1. Liczby a_n, zdefiniowane są następująco: $a_1 = \sqrt{5}$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wówczas

.... ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym,

.... wszystkie liczby a_n są liczbami niewymiernymi,

.... $(a_{2009})^{2^{2009}} = 5^{2^{2008}}$.

2. Rozważmy zbiór $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ i } 2009^x \text{ jest liczbą całkowitą}\}$. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem pustym,

.... zbiór $\mathcal{A}$ ma dokładnie 2008 elementów,

.... zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym.

3. Istnieje zbiór takich dziewięciu odcinków w przestrzeni, że każdy z nich ma punkt wspólny

.... z każdym innym,

.... z dokładnie trzema innymi,

.... z dokładnie czterema innymi.

4. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (0, 0)$, $B = (6, 4)$, $C = (-4, 6)$. Wówczas

.... pole trójkąta $\triangle ABC$ jest równe 52,

.... wysokość $\overline{AA'}$ ma długość $3\sqrt{3}$,

.... miara kąta $\sphericalangle ABC$ wynosi 45°.

5. 2009 odcinków o długości 1 tworzy w przestrzeni łamaną zamkniętą bez samoprzecięć. Wówczas

.... odległość dowolnych dwóch punktów tej łamanej jest niewiększa niż 1004,

.... istnieje taka kula o promieniu 502, w której zawarta jest cała ta łamana,

.... może się zdarzyć, że cała taka łamana zawarta jest w sześcianie o długości krawędzi $0{,}9$.

6. Każda z danych liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1005}$ daje inną resztę z dzielenia przez 2009. Wówczas

.... co najmniej jedna z tych liczb jest liczbą parzystą,

.... istnieją takie dwa indeksy $1 \leqslant k < l \leqslant 1005$, że 2009 dzieli $a_k + a_l$,

.... istnieją takie dwa indeksy $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant 1005$, że $\mathrm{NWD}\,(a_k,\, a_l) = 1$.

7. Liczba $41!$ (*silnia*)

.... jest podzielna przez 10^{10},

.... jest podzielna przez 2009,

.... jest większa niż liczba 21^{41}.

8. Jeżeli wielomiany $X^5 - X^3 + X^2 - mX + 2$, $X^3 + (1-m)X^2 + 2X - 1$ mają wspólny pierwiastek wymierny, to

.... m nie jest liczbą całkowitą,

.... $m = -3$,

.... $|m| = 3$.

9. Na okręgu o promieniu 2009 wybrano tak 2009 łuków o długości $\frac{25}{4}$, że każde dwa mają co najmniej jeden punkt wspólny. Wówczas

.... istnieje punkt okręgu, który nie należy do żadnego z tych łuków,

.... istnieje taki punkt okręgu, który należy do co najmniej 1005 z tych łuków,

.... wszystkie te łuki mają punkt wspólny.

10. Dany jest trójkąt o wszystkich bokach krótszych niż 1. Punkt G jest punktem przecięcia środkowych tego trójkąta, punkt H punktem przecięcia wysokości tego trójkąta, a punkt O środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wówczas

.... mogą zachodzić równości $G = H = O$,

.... może zajść równość $|GH| = 2009$,

.... punkty G, H, O mogą być wierzchołkami trójkąta o polu równym 2009.

11. Różne cięciwy $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ okręgu $\mathcal{K}$ przecinają się w punkcie P. Wówczas

.... jeżeli $|AP| = |BP|$, to $|CP| = |DP|$,

.... jeżeli $|AP| = |BP|$ i $|CP| = |DP|$, to P jest środkiem okręgu,

.... jeżeli $|AP| = 4$, $|BP| = 9$ i $|CP| + |DP| = 12$, to $\overline{AP}$ jest środkową trójkąta $\triangle ACD$.

12. Na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty A_1, A_2, A_3, A_4. Oznaczmy przez $\mathcal{X}_i$ zbiór tych punktów płaszczyzny, które leżą bliżej punktu A_i niż pozostałych trzech punktów A_j. Wówczas

.... zbiory $\mathcal{X}_i$ są parami rozłączne,

.... wszystkie zbiory $\mathcal{X}_i$ są zbiorami wypukłymi,

.... wszystkie zbiory $\mathcal{X}_i$ są zbiorami nieograniczonymi.

13. Dany jest ciąg (a_n) liczb dodatnich. Oznaczmy przez (b_n) ciąg zadany wzorem $b_n = \log a_n$. Wówczas

.... jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym,

.... jeżeli (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym,

.... ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (b_n) jest ciągiem rosnącym.

14. Dany jest wielomian $W(X) = X^{2008} + X^{1004} - 1$. Wówczas

.... wielomian $W(X)$ jest kwadratem pewnego wielomianu,

.... funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = W(x)$ jest funkcją rosnącą,

.... wielomian $W(X)$ ma co najmniej dwa pierwiastki.

15. Symbolem $\{x\}$ oznaczamy *część ułamkową* liczby rzeczywistej x (czyli $\{x\} = x - [x]$). Dla danego ciągu (a_n) liczb rzeczywistych przez (a'_n) oznaczamy ciąg dany wzorem $a'_n = \{a_n\}$. Wówczas

.... jeżeli (a_n) i (a'_n) są ciągami arytmetycznymi, to (a_n) ma wszystkie wyrazy całkowite,

.... możliwa jest taka sytuacja, że oba ciągi (a_n), (a'_n) są niestałymi ciągami geometrycznymi,

.... jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o niezerowych wyrazach i różnicy niewymiernej, to ciąg (a'_n) ma co najwyżej jeden wyraz równy zero.

16. Okrąg o środku w punkcie $(2,\, 3)$ i promieniu $\sqrt{5}$

.... przechodzi przez dokładnie osiem punktów o obu współrzędnych całkowitych,

.... przechodzi przez co najmniej szesnaście punktów o obu współrzędnych wymiernych,

.... jest styczny do okręgu o środku w punkcie $(7,\, 8)$ i promieniu $7 - \sqrt{5}$.

17. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

.... $\max([x],\, [y]) = [\max(x,\, y)]$,

.... $[x - y] = [x] - [y]$,

.... $\min([x],\, [y]) + \max([x],\, [y]) = [x + y]$.

18. Niech $U(a,\, b,\, c,\, d)$ oznacza układ nierówności

$$\begin{cases} ax + by \geqslant 2009 \\ cx + dy \geqslant 2009. \end{cases}$$

Wówczas

.... istnieją takie stałe $a,\, b,\, c,\, d,$ że układ $U(a,\, b,\, c,\, d)$ nie ma rozwiązań,

.... istnieją takie stałe $a,\, b,\, c,\, d,$ że układ $U(a,\, b,\, c,\, d)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

.... układ $U(2,\, 3,\, -3,\, -2)$ nie ma rozwiązań.

19. Miary łukowe kątów $\sphericalangle A,\ \sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ czworokąta wypukłego $ABCD$ są różnymi liczbami naturalnymi. Wówczas

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem rozwartokątnym,

.... kąt $\sphericalangle D$ ma miarę (stopniową) większą niż $16°$,

.... taki czworokąt nie istnieje.

20. Następująca liczba jest liczbą wymierną

.... $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$,

.... $\sin 75° \sin 15°$,

.... $\sin 15°$.

2. ZADANIA TEKSTOWE

Każde z zadań tekstowych punktowane jest w skali od 0 do 10 punktów.

1. W okręgu o promieniu r dane są dwie prostopadłe cięciwy $\overline{AB},\ \overline{CD}$ przecinające się w punkcie K. Uzasadnić, że pole koła ograniczonego tym okręgiem jest równe
$$\frac{\pi}{4}(|AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2).$$

2. Uczeń może zaliczyć w ciągu jednego roku szkolnego jedną, dwie lub trzy kolejne klasy. Na ile sposobów uczeń ten może ukończyć dwunastoklasową szkołę?

Uwaga. Dla liczby rzeczywistej x symbol $[x]$ oznacza *część całkowitą* liczby x, to znaczy największą spośród takich liczb całkowitych k, że $k \leqslant x$.

P O W O D Z E N I A!