ROZWIĄZANIA ZADAŃ TEKSTOWYCH

ZADANIE 1. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkty E na półprostej h_{AB} na zewnątrz odcinka $\overline{AB}$ i F na półprostej h_{AD} na zewnątrz odcinka $\overline{AD}$. Proste l_{DE} i l_{BF} przecinają się w punkcie G. Udowodnić, że pola czworokątów $ABGD$ i $CEGF$ są równe.

R o z w i ą z a n i e. Przypomnimy dwa proste, ale ważne i często wykorzystywane w geometrii fakty, które pozwoliliśmy sobie nazwać lematami:

Lemat 1. *Jeżeli wierzchołki U i U' trójkątów $\triangle STU$ i $\triangle STU'$ leżą na prostej równoległej do prostej l_{ST}, to te trójkąty mają równe pola.*

D o w ó d. Równoległość prostych $l_{UU'}$ i l_{ST} implikuje równość (długości) wysokości badanych trójkątów opuszczonych z wierzchołków U i U' odpowiednio. To, wobec "wspólnoty" podstawy $\overline{ST}$, dowodzi tezy. ■

Lemat 2. *Jeżeli punkty A, B, A', B' leżą na jednej prostej, to dla dowolnego, leżącego poza tą prostą, punktu G zachodzi równość*

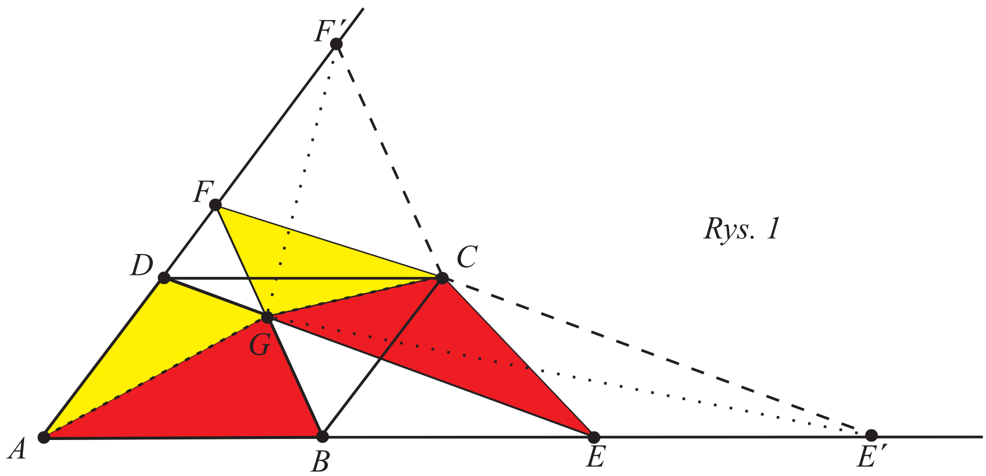
$$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle A'B'G}} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

W szczególności, gdy $|AB| = |A'B'|$, to $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle A'B'G}$.

D o w ó d. Wynika natychmiast z faktu, że trójkąty $\triangle ABG$ i $\triangle A'B'G$ mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka G. ■

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Niech $E' \in l_{AB}$ i $F' \in l_{AD}$ będą takimi punktami, że $|EE'| = |AB|$ i $|FF'| = |AD|$, patrz rysunek 1.



Rys. 1

Widzimy, że czworokąt $CDEE'$ jest równoległobokiem (bo ma przeciwległe boki $\overline{CD}$ i $\overline{EE'}$ równoległe i równej długości). Zatem $l_{DE} || l_{CE'}$. Wobec tego, na mocy **lematu 1**,

$$S_{\triangle GEC} = S_{\triangle GEE'}. \tag{1}$$

Dokładnie tak samo sprawdzamy, że czworokąt $CBFF'$ jest równoległobokiem i że zachodzi równość

$$S_{\triangle GFC} = S_{\triangle GFF'}. \tag{2}$$

Z drugiej strony, **lemat 2** pozwala napisać równości

$$S_{\triangle GEE'} = S_{\triangle GAB}, \tag{3}$$
$$S_{\triangle GFF'} = S_{\triangle GAD}. \tag{4}$$

Równości (1), (2), (3) i (4) dają ostatecznie:

$$S_{CEGF} = S_{\triangle GEC} + S_{\triangle GFC} = S_{\triangle GEE'} + S_{\triangle GFF'} = S_{\triangle GAB} + S_{\triangle GAD} = S_{ABGD}. \square$$

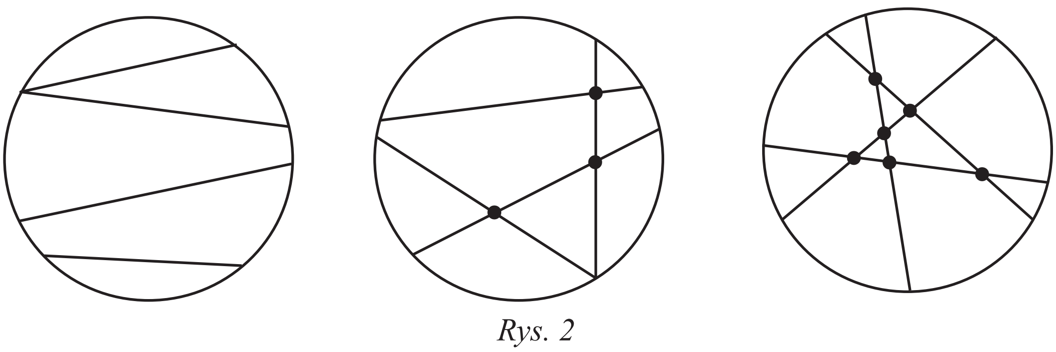
ZADANIE 2. Na okręgu pewnego koła $\mathcal{D}$ leży 11 punktów tak, że żadne trzy cięciwy o końcach w tych punktach nie przecinają się w jednym punkcie wewnętrznym koła $\mathcal{D}$. Rozważmy **wszystkie** cięciwy łączące te punkty. Wyznaczyć liczbę obszarów, na które te cięciwy dzielą koło $\mathcal{D}$.

R o z w i ą z a n i e. Będziemy rozwiązywać:

Zadanie ogólne. Wyznaczyć ilość obszarów na jakie dzielą dane koło wszystkie cięciwy o końcach w danym n-elementowym zbiorze punktów okręgu tego koła, jeżeli wiadomo, że rzeczone cięciwy są w położeniu ogólnym.

Mówimy, że rodzina cięciw danego koła jest rodziną ***w położeniu ogólnym***, gdy żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie wewnętrznym tego koła (na okręgu koła może się ich przecinać ile chce!).

Zastanówmy się najpierw, na ile części dzieli dane koło pewna ilość C cięciw w położeniu ogólnym. Widać, że wynik zależy od położenia tych cięciw (dokładniej, od tego ile jest punktów przecięcia tych cięciw wewnątrz koła):



Rys. 2

Wnikliwe przyglądanie się rysunkom (takim jak powyższe) pozwala postawić **hipotezę**, że ilość obszarów na jakie C cięciw w położeniu ogólnym dzieli koło wynosi

$$O = 1 + C + W, \tag{5}$$

gdzie W oznacza ilość punktów przecięcia tych cięciw wewnątrz koła.

Lemat. *Powyższa hipoteza jest prawdziwa.*

D o w ó d. Indukcja względem C. Dla $C = 1$ rzecz jest oczywista. Krok indukcyjny jest równie łatwy, jeśli zauważyć, że każda kolejna cięciwa "dokłada do puli" $w + 1$ obszarów, gdzie w oznacza ilość punktów przecięcia "nowej" cięciwy ze "starymi" cięciwami. ■

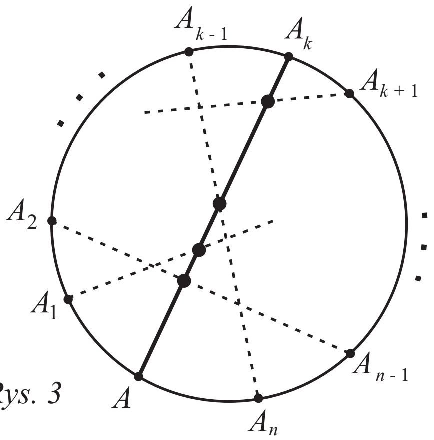
Po tym przygotowaniu możemy rozwiązać nasze zadanie. Jasnym jest, że

$$C = \binom{n}{2}. \tag{6}$$

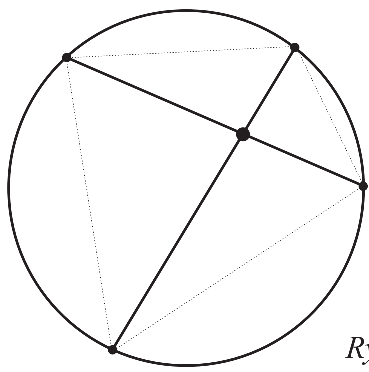
Przechodzimy do wyznaczenia W. Oznaczmy przez W_n ilość wewnętrznych punktów przecięcia wszystkich cięciw (w położeniu ogólnym) o końcach w n-elementowym podzbiorze okręgu. Obliczenie wartości W_n może być przeprowadzone "rzemieślniczo" lub "z błyskiem". Dobrze jest zrozumieć i przyswoić sobie oba sposoby.

S p o s ó b r z e m i e ś l n i c z y. Jasne, że $W_1 = W_2 = W_3 = 0$, $W_4 = 1$. Te równości dostarczają bazy indukcji, do której teraz przechodzimy.

Wyobraźmy sobie, że do danych n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (w tej kolejności) dokładamy $(n+1)$-szy punkt A pomiędzy punkty A_1 i A_n, zobacz rysunek 3.



Rys. 3


Rys. 4

Liczymy ilość (wewnętrznych) punktów przecięcia dowolnej cięciwy $\overline{AA_k}$ z pozostałymi cięciwami $\overline{A_iA_j}$. Ponieważ po jednej stronie cięciwy $\overline{AA_k}$ leżą punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, a po drugiej punkty $A_{k+1}, \ldots, A_{n-1}, A_n$, więc cięciwa $\overline{AA_k}$ przecina się z

$$(k-1)(n-k)$$

cięciwami $\overline{A_iA_{n+1-j}}$, dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-k$. Patrząc w ten sposób na kolejne cięciwy $\overline{AA_k}$, dla $k = 1, 2, \ldots, n$, widzimy więc, że

$$W_{n+1} = W_n + \sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k) = W_n + \binom{n}{3}. \tag{7}$$

Ostatnia równość może być prosto udowodniona przez indukcję. Porównując fundamentalną własność trójkąta Pascala:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

(przy $k = 4$) z równością (7), z najwyższą łatwością dowodzimy przez indukcję, że

$$W_n = \binom{n}{4}. \tag{8}$$

S p o s ó b z b ł y s k i e m. Dowolna czwórka punktów okręgu wyznacza **dokładnie** jeden wewnętrzny punkt przecięcia odpowiednich cięciw, zobacz rysunek 4. Wobec tego, W_n jest dokładnie równa ilości czteroelementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Zatem równość (8) jest prawdziwa.

Ostatecznie, dzięki równościom (5), (6) i (8), mamy:

Odpowiedź do zadania ogólnego: $O_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$.

Odpowiedź: $O_{11} = 1 + \binom{11}{2} + \binom{11}{4} = 1 + 55 + 330 = 386$.