LI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

13. 03. 2010

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów i wpisać słowo *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. TEST

1. Boki pewnego trójkąta mają długości będące naturalnymi potęgami liczby 2. Wówczas ten trójkąt

.... jest równoramienny

.... jest równoboczny

.... może być rozwartokątny

2. Okrąg $\mathcal{K}$ o promieniu 1 "objeżdża" jednokrotnie, tocząc się bez poślizgu, od zewnątrz nieruchomy okrąg o promieniu 4. Wówczas

.... środek okręgu $\mathcal{K}$ przebywa drogę długości 12π

.... ustalona średnica okręgu $\mathcal{K}$ wykonuje dokładnie 4 pełne obroty

.... ustalony punkt okręgu $\mathcal{K}$ przebywa drogę dłuższą niż 8π

3. Ciąg (a_n) dany jest przez $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2010}$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wówczas

.... (a_n) jest ciągiem rosnącym

.... (a_n) jest ciągiem geometrycznym

.... $a_{2010} > 3$

4. Trzyelementowemu zbiorowi $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ liczb rzeczywistych przyporządkowujemy liczbę

$$l(A) = \lfloor a_1 \rfloor + \lfloor a_2 \rfloor + \lfloor a_3 \rfloor + \lfloor -a_1 \rfloor + \lfloor -a_2 \rfloor + \lfloor -a_3 \rfloor.$$

Wówczas

.... $l(A)$ jest liczbą niedodatnią

.... $l(A)$ jest liczbą całkowitą nieparzystą

.... jeżeli $a_1 + a_2 + a_3 = 2010$, to $l(A) \neq -1$

5. Dany jest wielomian $F(X) = (X^{2010} - 2X^{1005} + 1)^4$. Wówczas, reszta, jaką daje ten wielomian przy dzieleniu przez dwumian

.... $X + 2010$, jest liczbą całkowitą parzystą

.... $X + 1$, jest równa 256

.... $X^2 + 1$, jest wielomianem $16X + 16$

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt S jest punktem przecięcia przekątnych $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Załóżmy, że pola trójkątów $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ są równe. Wówczas

.... czworokąt $ABCD$ jest prostokątem

.... $\overline{BC} || \overline{AD}$

.... czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym

7. Niech, dla danej liczby $a \in \mathbb{R}$, symbol $Z(a)$ oznacza zbiór wszystkich rzeczywistych rozwiązań równania $2^{\sin x} = ax$. Wówczas

.... jeżeli $a \neq 0$, to zbiór $Z(a)$ jest niepusty

.... istnieją takie liczby $a \in \mathbb{R}$, dla których zbiór $Z(a)$ ma więcej niż 2010 elementów

.... $Z(-1/2)$ jest zbiorem dwuelementowym

8. Ciąg (a_n) o wyrazach będących liczbami dodatnimi nazywa się ***ciągiem harmonicznym***, gdy każdy (oprócz pierwszego) jego wyraz jest średnią harmoniczną wyrazów poprzedniego i następnego. Wówczas,

.... ciąg (h_n) dany przez $h_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem harmonicznym

.... jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są harmoniczne, to ciąg $\left(\frac{a_n b_n}{a_n + b_n}\right)$ jest harmoniczny

.... jeżeli (a_n) jest ciągiem harmonicznym, to $\left(2^{\frac{1}{a_n}}\right)$ jest ciągiem geometrycznym

9. Niech O_X oznacza przekształcenie płaszczyzny polegające na obrocie wokół punktu X o kąt 30° zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Niech $A \neq B$ będą dwoma punktami płaszczyzny. Wówczas

.... złożenie $O_A \circ O_B$ jest obrotem wokół środka odcinka $\overline{AB}$

.... złożenie $O_A \circ O_B$ jest złożeniem pewnej ilości symetrii osiowych

.... $O_A \circ O_B = O_B \circ O_A$

10. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$. Wówczas

.... równanie $f(x) = 7$ ma więcej niż cztery rozwiązania rzeczywiste

.... równanie $f(x) = 2010$ ma dokładnie dwa rozwiązania całkowite

.... funkcja f jest funkcją rosnącą

11. Rozważmy zbiór $\mathcal{R}$ wszystkich pięciowyrazowych ciągów o wyrazach będących liczbami całkowitymi z przedziału $[0, 9]$. Wówczas podzbiór zbioru $\mathcal{R}$ składający się ze wszystkich

.... ciągów (ściśle) rosnących ma $\binom{10}{5}$ elementów

.... ciągów nierosnących ma $\binom{14}{5}$ elementów

.... ciągów niemalejących ma 252 elementy

12. Różne proste k i l są osiami symetrii płaskiej figury $\mathcal{F}$. Wówczas

.... jeżeli $k \perp l$, to $\mathcal{F}$ jest kołem

.... jeżeli $k||l$, to $\mathcal{F}$ ma jeszcze co najmniej jedną oś symetrii

.... jeżeli osie k i l przecinają się pod kątem o mierze $36°$, to $\mathcal{F}$ ma jeszcze co najmniej osiem innych osi symetrii

13. Dany jest trójkąt prostokątny $\triangle ABC$. Dwusieczna kąta prostego $\sphericalangle C$ dzieli przeciwprostokątną na odcinki $\overline{AF}$ o długości 2 i $\overline{BF}$ o długości 3. Wówczas

.... spodek C' wysokości $\overline{CC'}$ dzieli bok $\overline{AB}$ w proporcji $|AC'| : |C'B| = 4 : 9$

.... pole trójkąta $\triangle ABC$ wynosi 6

.... $\sin|\sphericalangle A| = \frac{2}{\sqrt{3}}$

14. Liczba $123!$ (sto dwadzieścia trzy silnia) jest podzielna przez

.... 57^6

.... 11^{12}

.... 2^{118}

15. Zbiór liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $||x| - 1| \leq 2009$

.... jest zbiorem pustym

.... zawiera dokładnie 4019 liczb całkowitych

.... jest podzbiorem zbioru $\{x : \ |x - 1| \leq 2010\}$

16. Równanie $x^3 + 2x^2 + x + a = 0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Wobec tego

.... $a < 0$

.... $a < \frac{4}{27}$

.... najmniejszy z tych pierwiastków jest mniejszy niż -1

17. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^5 + 16|x|$. Wówczas

.... funkcja ta jest funkcją rosnącą

.... funkcja ta ma dokładnie trzy miejsca zerowe

.... funkcja ta ma dokładnie dwa miejsca zerowe

18. Dla kątów α, β, γ pewnego trójkąta zachodzi związek $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$. Wówczas

.... ten trójkąt jest trójkątem rozwartokątnym

.... środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży we wnętrzu tego trójkąta

.... taki trójkąt nie istnieje

19. Trójmian kwadratowy $X^2 + 2010X - 1005^2$

.... ma dwa różne pierwiastki będące liczbami wymiernymi

.... nie ma pierwiastków rzeczywistych

.... ma takie pierwiastki rzeczywiste α, β, że $\alpha^2 + \beta^2$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 75

20. Wielościan $\mathcal{U}$ zawarty jest w wielościanie $\mathcal{W}$. Wówczas

.... objętość wielościanu $\mathcal{U}$ jest niewiększa niż objętość wielościanu $\mathcal{W}$

.... pole powierzchni wielościanu $\mathcal{U}$ jest niewiększe niż pole powierzchni wielościanu $\mathcal{W}$

.... sumaryczna długość krawędzi wielościanu $\mathcal{U}$ jest niewiększa od sumarycznej długości krawędzi wielościanu $\mathcal{W}$

2. ZADANIA TEKSTOWE

1. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E na półprostej h_{AB} na zewnątrz odcinka $\overline{AB}$ i punkt F na półprostej h_{AD} na zewnątrz odcinka $\overline{AD}$. Proste l_{DE} i l_{BF} przecinają się w punkcie G. Udowodnić, że pola czworokątów $ABGD$ i $CEGF$ są równe.

2. Dane jest koło $\mathcal{D}$ i 11 punktów na okręgu tego koła wybranych tak, że żadne trzy cięciwy o końcach w tych punktach **nie** przechodzą przez ten sam punkt **wewnętrzny** koła $\mathcal{D}$. Rozważmy **wszystkie** cięciwy o końcach w zadanych punktach. Obliczyć liczbę obszarów, na jakie zostało podzielone koło $\mathcal{D}$ przez te cięciwy.

Uwagi.
1. Dla liczby rzeczywistej x symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza *część całkowitą* liczby x, to znaczy największą spośród takich liczb całkowitych k, że $k \leqslant x$.
2. Średnią harmoniczną dodatnich liczb a, b nazywamy liczbę $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

P O W O D Z E N I A !