==============ROZWIĄZANIA===============

2. ZADANIA TEKSTOWE

Zadanie 1. Dany jest zbiór

$$\mathcal{X} = \{1,\ 11,\ 21,\ 31,\ \ldots,1991,\ 2001,\ 2011\}$$

składający się z wyrazów ciągu arytmetycznego $(1+10n)_{0\le n\le 201}$. Podzbiór $\mathcal{A}$ zbioru $\mathcal{X}$ nazwiemy *podzbiorem łaskawym,* gdy spełnia warunek: jeżeli $a,\ b \in \mathcal{A},$ to $a+b \neq 2012.$ Wyznaczyć ilość podzbiorów łaskawych.

Rozwiązanie. Niech $\mathcal{X}_k = \{10k-9,\ 2021-10k\},$ dla $k = 1,\ 2,\ \ldots,101,$ będą dwuelementowymi podzbiorami zbioru $\mathcal{X}$. Zbiór $\mathcal{X}$ jest sumą zbiorów $\mathcal{X}_k$:

$$\mathcal{X} = \{1,\ 2011\} \cup \{11,\ 2001\} \cup \ldots \cup \{991,\ 1021\} \cup \{1001,\ 1011\}. \tag{1}$$

Ponieważ suma dwóch liczb należących do każdego składnika powyższej sumy zbiorów jest równa $2012,$ więc jest jasne, że podzbiór łaskawy **nie** może zawierać jednocześnie obu elementów żadnego składnika $\mathcal{X}_k$ sumy (1). Ponieważ suma (1) ma 101 składników, więc podzbiór łaskawy nie może mieć więcej niż 101 elementów. Jasne jest też, że każdy podzbiór $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym składnikiem sumy (1) jest podzbiorem łaskawym.

Zgodnie z powyższą analizą, każdy podzbiór łaskawy jest wyznaczony jednoznacznie przez wybór dowolnego podzbioru $I \subseteq \{1,\ 2,\ \ldots,101\}$ i dowolnej funkcji $f : I \longrightarrow \{1,\ 2\}$. Podzbiór I zawiera numery tych podzbiorów $\mathcal{X}_k,$ z których będziemy wybierali elementy do podzbioru łaskawego $\mathcal{A}$, a $f(j) = 1$ dla $j \in I,$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}_j$ zawiera **pierwszy** element zbioru $\mathcal{X}_j$ i $f(j) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}_j$ zawiera **drugi** element zbioru $\mathcal{X}_j$. Wobec tego, wszystkich podzbiorów łaskawych jest

$$\sum_{i=0}^{101} \binom{101}{i} \cdot 2^i = (1+2)^{101} = 3^{101},$$

bo i-elementowych podzbiorów I zbioru 101-elementowego jest dokładnie $\binom{101}{i}$, a funkcji f określonych na i-elementowym zbiorze I i przyjmujących wartości w zbiorze 2-elementowym jest dokładnie 2^i, zobacz na przykład [$\mathbb{KOM}$ **T1.1.1**]. Druga równość wynika z twierdzenia o dwumianie, zobacz na przykład [$\mathbb{KOM}$ (1.33)].

Uwaga. Nieco prościej można rozumować następująco: ilość wszystkich podzbiorów łaskawych równa jest dokładnie mocy zbioru wszystkich funkcji

$$g : \{1,\ 2,\ \ldots,101\} \longrightarrow \{0,\ 1,\ 2\}.$$

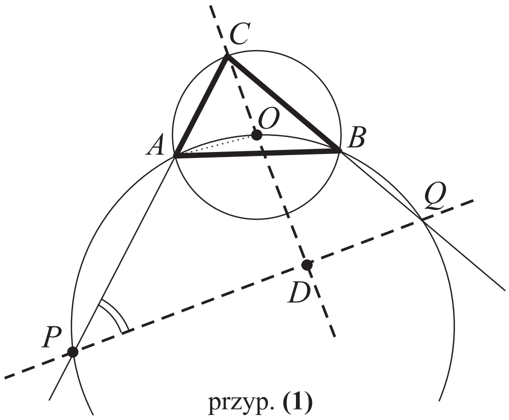
Przy tym bijekcja $g \longleftrightarrow \mathcal{A}$ wyzanczona jest przez zależności

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \cap \mathcal{X}_k = \varnothing \quad &\Longleftrightarrow \quad g(k) = 0,\\
\mathcal{A} \cap \mathcal{X}_k = \{10k-9\} \quad &\Longleftrightarrow \quad g(k) = 1,\\
\mathcal{A} \cap \mathcal{X}_k = \{2021-10k\} \quad &\Longleftrightarrow \quad g(k) = 2.
\end{aligned}$$

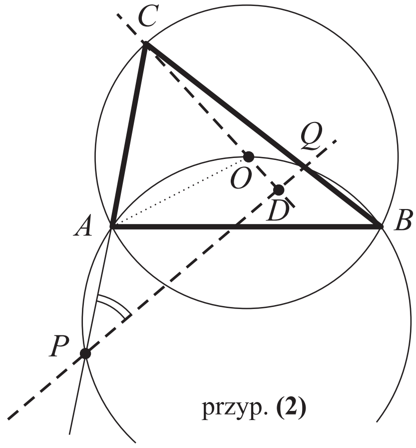
Ponieważ zbiór wszystkich funkcji g ma moc 3^{101}, zobacz [$\mathbb{KOM}$ **T1.1.1**], więc i podzbiorów łaskawych jest 3^{101}.

Zadanie 2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$. Załóżmy, że prosta l_{AC} przecina okrąg opisany na trójkącie $\triangle ABO$ w punktach A i P, a prosta l_{BC} przecina okrąg opisany na trójkącie $\triangle ABO$ w punktach B i Q. Udowodnić, że proste l_{CO} i l_{PQ} są prostopadłe.

Rozwiązanie. Możliwe są cztery przypadki: **(1)** punkty P i Q leżą na zewnątrz boków $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$, **(2)** punkt P leży na zewnątrz boku $\overline{CA}$, a punkt Q leży na boku $\overline{CB}$, **(3)** punkt P leży na boku $\overline{CA}$, a punkt Q leży na zewnątrz boku $\overline{CB}$, **(4)** oba punkty P i Q leżą na odpowiednich bokach.



przyp. **(1)**



przyp. **(2)**

Oznaczmy przez D punkt przecięcia prostych l_{CO} i l_{PQ}. Pokazujemy, że trójkąt $\triangle CPD$ jest **trójkątem prostokątnym**. Rozumujemy w przypadkach **(1)** i **(2)**, pozostałe pozostawiamy Czytelnikom.

(1) Ponieważ czworokąt $APQB$ jest czworokątem cyklicznym (wpisywalnym w okrąg), więc

$$m(\sphericalangle DPC) = m(\sphericalangle QPA) = 180^\circ - m(\sphericalangle QBA) = m(\sphericalangle ABC) = \beta. \tag{2}$$

Kąt $\sphericalangle ABC$ jest kątem wpisanym w okrąg $\mathcal{K}_{\triangle ABC}$ opisany na trójkącie $\triangle ABC$. Kątem środkowym w tym okręgu opartym na tym samym łuku $\smile AC$. Z twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym, patrz na przykład [$\mathbb{GEO}$ **T1.19**], wnioskujemy, że $m(\sphericalangle AOC) = 2\beta$. Bilans kątów w trójkącie równoramiennym $\triangle AOC$ daje

$$m(\sphericalangle PCD) = m(\sphericalangle ACO) = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\sphericalangle COA)) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta) = 90^\circ - \beta.$$

To i równość (2) dają:

$$m(\sphericalangle CDP) = 180^\circ - m(\sphericalangle DPC) - m(\sphericalangle PCD) = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ.$$

Zatem $l_{CO} \perp l_{PQ}$.

(2) W tym przypadku, od razu z twierdzenia Apolloniusza o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, patrz na przykład [$\mathbb{GEO}$ **T1.20**], wnioskujemy, że $m(\sphericalangle CPD) = \beta$. Pozostała część rozumowania jak wyżej.

Cytowana literatura.

[$\mathbb{KOM}$] B. Bogdańska, A. Neugebauer – *Matematyka Olimpijska:* ***Kombinatoryka*** – Szczecin 2011.

[$\mathbb{GEO}$] B. Bogdańska, A. Neugebauer – *Matematyka Olimpijska:* ***Geometria*** – Szczecin 2010.