LII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

$12.\,03.\,2011$

1. TEST

Każdy zawodnik rozwiązuje dwadzieścia zadań testowych, w których podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów wpisując *TAK* lub *NIE* w miejscu zaznaczonym kropkami.

P u n k t a c j a: $\mathbf{1}$ punkt za każdą poprawną odpowiedź, $\mathbf{0}$ punktów za brak odpowiedzi, $-\mathbf{1}$ punkt za odpowiedź niepoprawną i $\mathbf{1}$ punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Cyfry x i y są cyframi dziesiętnymi liczby $L = 234xy56$. Wówczas

.... istnieje dokładnie 10 par $(x,\,y)$ takich cyfr, dla których 9 dzieli liczbę L,

.... istnieją takie cyfry x i y, dla których 99 dzieli liczbę L,

.... istnieją co najmniej trzy pary cyfr $(x,\,y)$, dla których 77 dzieli liczbę L.

2. Mamy dwa ciągi arytmetyczne (a_n), (b_n) i ciąg (c_n) dany wzorem $c_n = \max(a_n,\,b_n)$ dla $n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$. Wówczas

.... ciąg (c_n) jest ciągiem arytmetycznym,

.... istnieje taka liczba naturalna s, że ciąg (d_n) dany wzorem $d_n = c_{n+s}$ jest ciągiem arytmetycznym,

.... jeżeli ciąg (c_n) ma trzy wyrazy równe, to oba ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami stałymi.

3. Dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich $n,\,k,\,l$ spełniających warunek $n > k > l$ zachodzi

.... $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{l} = \binom{n}{l}$,

.... $\binom{n}{k} + \binom{k}{l} = \binom{n}{l}$,

.... $\binom{n}{k} > \binom{k}{l}$.

4. Czworokąt mający środek symetrii jest

.... trapezem,

.... równoległobokiem,

.... rombem.

5. Pewne dwie różne proste $k,\,l$ są osiami symetrii danego wielokąta $\mathcal{W}$. Wówczas

.... proste k i l są równoległe,

.... proste k i l są prostopadłe,

.... wielokąt $\mathcal{W}$ ma środek symetrii.

6. Rozważmy liczbę $A = 121!$ (*silnia*). Wówczas

.... liczba A ma w zapisie dziesiętnym więcej niż 30 zer na końcu,

.... liczba A jest mniejsza niż 61^{121},

.... liczba A dzieli się przez co najmniej 41 różnych liczb pierwszych.

7. Wszystkie trzy wysokości równoległościanu $\mathcal{R}$ mają tę samą długość równą 10. Wówczas

.... objętość równoległościanu $\mathcal{R}$ wynosi 10^3,

.... pole powierzchni równoległościanu $\mathcal{R}$ jest niemniejsze niż 600,

.... równoległościan $\mathcal{R}$ jest sześcianem.

8. Dowolny ściśle rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach będących liczbami całkowitymi dodatnimi

.... ma wyraz, którego zapis dziesiętny ma postać $2011{*}{*}\cdots{*}{*}$,

.... ma wyraz, którego zapis dziesiętny ma postać ${*}{*}\cdots{*}{*}2011$,

.... ma wyraz będący liczbą naturalną podzielną przez 2011.

9. Liczby rzeczywiste u, v spełniają zależność $u^2 + v^2 = 1$, Wówczas

.... jeżeli $u \cdot v \neq 0$, to liczby u i v nie są jednocześnie liczbami wymiernymi,

.... jeżeli $u < \frac{1}{2}$, to $v \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

.... u jest niewymiernością kwadratową wtedy i tyko wtedy, gdy v jest niewymiernością kwadratową.

Uwaga. Liczbę rzeczywistą a nazywamy *niewymiernością kwadratową*, gdy jest ona niewymierna i jest pierwiastkiem pewnego wielomianu stopnia drugiego o współczynnikach wymiernych.

10. Przez O oznaczamy środek okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ABC$, a przez I środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wówczas

.... pole trójkąta $\triangle AOI$ jest mniejsze niż pole trójkąta $\triangle ABC$,

.... punkty A, O, I leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt $\triangle ABC$ ma oś symetrii,

.... może zachodzić nierówność $S_{\triangle AOI} + S_{\triangle BOI} \leq S_{\triangle COI}$.

11. Dane są liczby $a_n = \frac{3n^2+3n-15}{n+1}$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wówczas

.... wszystkie liczby a_n są liczbami wymiernymi,

.... ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym,

.... dokładnie dwie z liczb a_n są liczbami całkowitymi.

12. Istnieją takie liczby naturalne $k, l \geq 3$, że

.... liczby k, l i $k + l$ są liczbami pierwszymi,

.... liczba l^k jest liczbą pierwszą,

.... liczba $kl + 2k + 3l + 6$ jest liczbą pierwszą.

13. Długości boków pewnego trójkąta prostokątnego $\triangle XYZ$ wynoszą $|YZ| = x$, $|ZX| = y$ i $|XY| = z$. Wówczas, jeżeli

.... $x \geq y \geq z$, to kąt przy wierzchołku X jest kątem prostym,

.... $2x = y + z$, to jeden z kątów tego trójkąta ma miarę $30°$,

.... $x \geq y \geq z$ są liczbami naturalnymi, to $z \geq 2$.

14. Płaszczyzna o równaniu $6x + 3y + 2z = 6$ wraz z płaszczyznami Oxy, Oyz i Ozx prostokątnego układu współrzędnych są płaszczyznami ścian czworościanu $\mathcal{C}$. Wówczas

.... objętość czworościanu $\mathcal{C}$ wynosi 1,

.... pole powierzchni czworościanu $\mathcal{C}$ jest mniejsze niż 10,

.... promień kuli opisanej na czworościanie $\mathcal{C}$ jest równy 2.

15. W płaszczyźnie ϱ dane są dwie proste p i q przecinające się pod kątem o mierze $60°$. Niech

$$\mathcal{A}(a) = \{X \in \varrho : \ d(X, p) + d(X, q) \leq a\}$$

będzie zbiorem takich punktów płaszczyzny ϱ, dla których suma odległości od prostych p i q jest niewiększa od a. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}(1)$ ma środek symetrii,

.... istnieje taka jednokładność J, że $J(\mathcal{A}(1)) = \mathcal{A}(2)$,

.... zbiór $\mathcal{A}(2011)$ jest zbiorem wypukłym.

16. Współczynniki a, b, c trójmianu kwadratowego $f(X) = aX^2 + bX + c$ spełniają warunki: $ab > 0$, $c > 0$. Wówczas

.... trójmian $f(X)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych,

.... funkcja $x \longmapsto f(x)$ osiąga w pewnym punkcie maksimum lokalne,

.... możliwe jest, że funkcja $x \longmapsto f(x)$ osiąga minimum równe -2011.

17. Pewna płaszczyzna ϱ przecina dodatnie części osi Ox, Oy i Oz prostokątnego układu współrzędnych w punktach A, B i C odpowiednio. Wówczas

.... trójkąt $\triangle ABC$ może być trójkątem rozwartokątnym,

.... do każdego trójkąta ostrokątnego $\triangle XYZ$ istnieje taka płaszczyzna ϱ, że $\triangle XYZ$ przystaje do $\triangle ABC$,

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy $|OA| = |OB| = |OC|$.

18. Jeżeli dla liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $\sqrt{4 - 3x} > x$, to

.... $x \in (-4, 1)$,

.... $x \in (-\infty, 1)$,

.... $x \in (-\infty, \frac{4}{3}]$.

19. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b przyjmijmy $a \oplus b = a + b + 1$ oraz $a \odot b = ab + a + b$. Wówczas dla dowolnych liczb a, b, c

.... zachodzi równość $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$,

.... zachodzi równość $a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot c$,

.... równanie $a \odot x = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

20. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

.... jeśli funkcja f jest parzysta, to $|f(x)| = f(|x|)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,

.... jeśli $-f(|x|) = f(-|x|)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to f jest funkcją nieparzystą,

.... jeśli $f(|x| + 1) = f(|x|)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to f jest funkcją okresową.

2. ZADANIA TEKSTOWE

P u n k t a c j a: Każde z zadań tekstowych punktowane jest w skali od 0 do 10 punktów.

1. Dany jest zbiór

$$\mathcal{X} = \{1,\ 11,\ 21,\ 31,\ \ldots,1991,\ 2001,\ 2011\}$$

składający się z wyrazów ciągu arytmetycznego $(1+10n)_{0 \le n \le 201}$. Podzbiór $\mathcal{A}$ zbioru $\mathcal{X}$ nazwiemy *podzbiorem łaskawym*, gdy spełnia warunek: jeżeli $a, b \in \mathcal{A}$, to $a + b \neq 2012$. Wyznaczyć ilość podzbiorów łaskawych.

2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$. Załóżmy, że prosta l_{AC} przecina okrąg opisany na trójkącie $\triangle ABO$ w punktach A i P, a prosta l_{BC} przecina okrąg opisany na trójkącie $\triangle ABO$ w punktach B i Q. Udowodnić, że proste l_{CO} i l_{PQ} są prostopadłe.

P O W O D Z E N I A !