R O Z W I Ą Z A N I A   Z A D A Ń   T E K S T O W Y C H

ZADANIE 1 Los o numerze $A\,B\,C\,D\,E\,F$ nazwijmy *fajnym*, gdy $A+B+C = D+E+F$. Mamy udowodnić, że liczba losów fajnych równa jest liczbie losów szczęśliwych.

Oznaczmy przez $\mathcal{B}$ zbiór wszystkich wydrukowanych losów, przez $\mathcal{S}$ zbiór losów szczęśliwych a przez $\mathcal{F}$ zbiór losów fajnych. Niech $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ będzie funkcją, która losowi o numerze $A\,B\,C\,D\,E\,F$ przyporządkowuje los o numerze $(9-A)\,(9-B)\,(9-C)\,D\,E\,F$. Jasne, że φ jest bijekcją (odwrotną do niej bijekcją jest ona sama: $\varphi\circ\varphi = \mathrm{Id}$). Mamy lemacik:

LEMAT 1 *Los o numerze $A\,B\,C\,D\,E\,F$ jest fajny wtedy i tylko wtedy, gdy los o numerze $(9-A)\,(9-B)\,(9-C)\,D\,E\,F$ jest szczęśliwy. I odwrotnie, los o numerze $A\,B\,C\,D\,E\,F$ jest szczęśliwy wtedy i tylko wtedy, gdy los o numerze $(9-A)\,(9-B)\,(9-C)\,D\,E\,F$ jest fajny.*

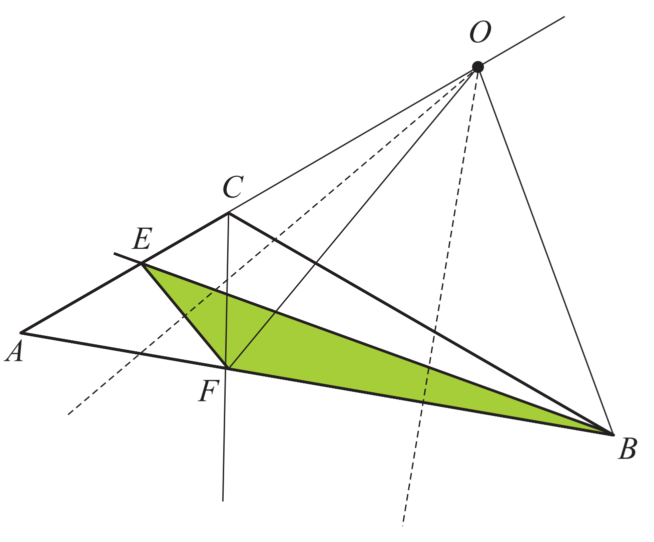
Dowód lematu jest natychmiastowy i wynika z oczywistych równoważności:

$$A+B+C = D+E+F \quad\Leftrightarrow\quad (9-A)+(9-B)+(9-C)+D+E+F = 27,$$

$$A+B+C+D+E+F = 27 \quad\Leftrightarrow\quad (9-A)+(9-B)+(9-C) = D+E+F.$$

Lemacik można zapisać równoważnie tak: $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{S}$ (i odwrotnie, $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{F}$). To kończy rozwiązanie zadania. ♦

ZADANIE 2 Niech O będzie leżącym na prostej AC środkiem okręgu $\mathcal{K}$ opisanego na trójkącie $\triangle BEF$.



Wówczas $\sphericalangle EOF$ jest kątem środkowym w okręgu $\mathcal{K}$, a kąt $\sphericalangle EBF$ jest kątem wpisanym w ten okrąg opartym na tym samym łuku $\widehat{EF}$. Zatem, na mocy twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym,

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle EOF) &= 2m(\sphericalangle EBF) \\ &= m(\sphericalangle CBF). \end{aligned}$$

Druga równość wynika z założenia, że $\overline{BE}$ jest dwusieczną. Zatem, odcinek $\overline{CF}$ widać z punktu O i z punktu B pod tym samym kątem. Wobec tego czworokąt $BOCF$ jest czworokątem cyklicznym, czyli wpisywalnym w pewien okrąg. Korzystając z tej cykliczności mamy:

$$m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ - m(\sphericalangle OCB) = 180^\circ - m(\sphericalangle OFB),$$

oraz

$$m(\sphericalangle ACB) = 2m(\sphericalangle FCB) = 2m(\sphericalangle FOB) = 2(180^\circ - 2m(\sphericalangle OFB)).$$

Skąd, z najwyższą łatwością dostajemy **odpowiedź**: $m(\sphericalangle ACB) = 120^\circ$. ♦