LIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

17. 03. 2012

1. TEST[1]

1. Niech $F_n(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wówczas

   TAK jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to wielomian $F_n(X)$ ma pierwiastek rzeczywisty,

   NIE dla dowolnych $n, m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ zachodzi równość $F_n(X)F_m(X) = F_{nm}(X)$,

   TAK $F_n(X)$ dzieli $F_m(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1$ dzieli $m + 1$.

2. Wielomian $W(X) = aX^2 + bX + c$ o współczynnikach rzeczywistych nie ma pierwiastków rzeczywistych oraz $a + b + c < 0$. Wówczas

   TAK $W(x) < 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,

   NIE $a < 0$,

   TAK $c < 0$.

3. Niech $f(x, y) = x^2 - y^2$. Wówczas

   NIE istnieją takie liczby całkowite x, y, że $f(x, y) = 2$,

   TAK jeżeli $p > 100$ jest liczbą pierwszą, to istnieją takie $x, y \in \mathbb{N}$, że $f(x, y) = p$,

   NIE istnieją takie nieparzyste liczby naturalne x, y, że $f(x, y) = 2012$.

4. Niech $D(n)$ oznacza sumę cyfr dziesiętnych liczby naturalnej n. Wówczas

   TAK dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $D(m + n) \leq D(m) + D(n)$,

   TAK dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $D(n) \leq 10(1 + \log_{10} n)$,

   TAK różnica $n - D(n)$ jest liczbą podzielną przez 9 dla każdej liczby naturalnej n.

5. Liczba rzeczywista x jest taka, że $\cos x = \sqrt{3} - 1$. Wówczas

   NIE $\sin x = 2\sqrt{3} - 3$,

   TAK $\cos 2x = 7 - 4\sqrt{3}$,

   NIE $\cos 3x = 21\sqrt{3} - 38$.

[1] *W zadaniach testowych podano trzy (na ogół logicznie niezależne) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów i wpisać słowo* **TAK** *lub* **NIE** *w miejscu zaznaczonym kropkami.* Zadania testowe punktowane są następująco: **1** punkt za każdą poprawną odpowiedź, **0** punktów za brak odpowiedzi, **−1** punkt za odpowiedź niepoprawną i **1** punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w każdym zadaniu.

6. Liczba a jest parametrem rzeczywistym. Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U}(a): \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |x+y| + |x-y| = a. \end{cases}$$

Wówczas

NIE dla każdego $a > 0$ układ $\mathcal{U}(a)$ ma rozwiązania,

TAK istnieje co najmniej 2012 takich wartości a, że układ $\mathcal{U}(a)$ ma dokładnie 8 rozwiązań,

NIE istnieją takie trzy wartości a, że układ $\mathcal{U}(a)$ ma dokładnie cztery rozwiązania.

7. Istnieje

NIE ciąg arytmetyczny, którego pewne wyrazy są równe $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$,

NIE ciąg geometryczny, którego kolejne wyrazy są równe $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$,

TAK rosnący ciąg (x_n) o wyrazach niewymiernych, że $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_5 = \sqrt{6}$.

8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ciąg (a_n) dany jest przez $a_n = \{n\alpha\}$, a ciąg (b_n) dany jest przez $b_n = \{n\beta\}$. Przez $\{u\}$ oznaczamy część ułamkową liczby u. Wówczas

TAK jeżeli α jest liczbą wymierną, to ciąg (a_n) jest okresowy,

NIE jeżeli ciąg (b_n) jest stały, to $\beta = 0$,

TAK jeżeli $a_n \neq b_n$ dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, to $\beta - \alpha$ jest liczbą niewymierną.

9. n-ty wyraz ciągu $02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, \dots$ jest liczbą dwucyfrową składającą się z dwóch ostatnich cyfr dziesiętnych liczby 2^n. Wówczas

NIE pewien wyraz tego ciągu jest równy 11,

NIE nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest równych 22,

TAK nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest równych 44.

10. Niech $A_n = (1+n)^n - 1$ dla $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Wówczas

TAK $n^2 | A_n$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n,

TAK $n^3 | A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in \{1, 2\}$,

NIE $3 | A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3 | n$.

11. Liczbę naturalną nazwiemy *liczbą OK*, gdy liczba jej dzielników naturalnych jest liczbą **nieparzystą**. Wówczas

TAK liczba 64 jest liczbą OK,

NIE istnieje tylko skończenie wiele naturalnych liczb OK,

TAK istnieją dokładnie 44 całkowite dodatnie liczby OK mniejsze niż 2012.

12. Nierównoramienny trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$ jest wpisany w okrąg $\mathcal{K}$ o środku O. Oznaczamy przez A_s środek krótszego łuku $\overset{\smile}{BC}$, przez B_s środek krótszego łuku $\overset{\smile}{AC}$, a przez C_s środek krótszego łuku $\overset{\smile}{AB}$. Wówczas

NIE $\overline{A_sA}$ jest dwusieczną kąta $\sphericalangle B_sA_sC_s$,

NIE trójkąt $\triangle A_sB_sC_s$ jest równoramienny,

TAK kąt środkowy $\sphericalangle AOC_s$ ma miarę $\gamma = m(\sphericalangle C)$.

13. Punkty A', B', C' są spodkami wysokości trójkąta ostrokątnego $\triangle ABC$ mającego pole S i obwód $2p$. Wówczas

NIE trójkąt $\triangle A'B'C'$ jest ostrokątny,

NIE pole trójkąta $\triangle A'B'C'$ jest równe $S/4$,

NIE obwód trójkąta $\triangle A'B'C'$ jest równy p.

14. Kula $\mathcal{K}$ jest wpisana w ostrosłup $ABCDS$ o podstawie czworokątnej $ABCD$. Punkty U, V, W i Z są punktami styczności kuli $\mathcal{K}$ ze ścianami $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ i $\triangle DAS$ odpowiednio. Wówczas

NIE podstawa $ABCD$ tego ostrosłupa jest rombem,

TAK punkty U, V, W, Z leżą na jednej płaszczyźnie,

TAK $m(\sphericalangle VUZ) + m(\sphericalangle VWZ) = 180°$.

15. Wykonujemy obrót wokół punktu $(1,\,0)$ o kąt $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a następnie obrót wokół punktu $(-1,\,0)$ o kąt $90°$ również zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W wyniku tego

TAK punkt $(2,\,0)$ zostanie przekształcony w punkt $(-2,\,-2)$,

TAK prosta $x = 1$ zostanie przekształcona w prostą $x = -1$,

TAK prosta $y = -2012$ zostanie przekształcona w prostą $y = 2010$.

16. Trójkąty prostokątne $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ $(m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle C') = 90°)$ są takie, że zachodzi równość $|AB|^2 S(\triangle A'B'C') = |A'B'|^2 S(\triangle ABC)$, gdzie $S(\mathcal{T})$ oznacza pole trójkąta $\mathcal{T}$. Wówczas

NIE te trójkąty są równoramienne,

NIE te trójkąty są przystające,

TAK te trójkąty są podobne.

17. Każdy punkt kratowy płaszczyzny (czyli punkt o obu współrzędnych całkowitych) jest jednego z dwóch kolorów. Wówczas istnieje

TAK prostokąt o wierzchołkach będących punktami kratowymi jednego koloru,

NIE odcinek długości 7, którego oba końce są punktami kratowymi jednego koloru,

NIE trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są punktami kratowymi jednego koloru.

18. Jeżeli $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją, to przez g_a oznaczamy funkcję $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której wykres powstaje z wykresu funkcji g przez odbicie w prostej $y = a$. Wówczas

TAK jeżeli f jest funkcją rosnącą, to f_{2012} jest funkcją malejącą,

NIE zachodzi równość $(f_a)_b = (f_b)_a$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$,

NIE istnieje taka funkcja f, że $f_0 = f_1$.

19. Ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych niezerowych nazywa się *ciągiem harmonicznym*, gdy dla dowolnego $n \geq 2$ zachodzi równość $a_n = 2/(a_{n-1}^{-1} + a_{n+1}^{-1})$. Przy takiej definicji

TAK ciąg (h_n) dany wzorem $h_n = 1/n$ jest ciągiem harmonicznym,

TAK istnieją rosnące ciągi harmoniczne,

TAK jeżeli (a_n) jest ciągiem harmonicznym i $a_2 = a_3$, to $a_{2012} = a_1$.

20. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \{x^2\}$, gdzie $\{u\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej u. Wówczas

TAK funkcja f jest funkcją parzystą,

NIE funkcja f jest funkcją okresową,

NIE równanie $4f(x) = x$ ma dokładnie 4 rozwiązania.