LIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

17. 03. 2012

1. TEST[1]

1. Niech $F_n(X) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wówczas

   .... jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to wielomian $F_n(X)$ ma pierwiastek rzeczywisty,

   .... dla dowolnych $n, m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ zachodzi równość $F_n(X)F_m(X) = F_{nm}(X)$,

   .... $F_n(X)$ dzieli $F_m(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1$ dzieli $m + 1$.

2. Wielomian $W(X) = aX^2 + bX + c$ o współczynnikach rzeczywistych nie ma pierwiastków rzeczywistych oraz $a + b + c < 0$. Wówczas

   .... $W(x) < 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,

   .... $a < 0$,

   .... $c < 0$.

3. Niech $f(x, y) = x^2 - y^2$. Wówczas

   .... istnieją takie liczby całkowite x, y, że $f(x, y) = 2$,

   .... jeżeli $p > 100$ jest liczbą pierwszą, to istnieją takie $x, y \in \mathbb{N}$, że $f(x, y) = p$,

   .... istnieją takie nieparzyste liczby naturalne x, y, że $f(x, y) = 2012$.

4. Niech $D(n)$ oznacza sumę cyfr dziesiętnych liczby naturalnej n. Wówczas

   .... dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $D(m + n) \leq D(m) + D(n)$,

   .... dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $D(n) \leq 10(1 + \log_{10} n)$,

   .... różnica $n - D(n)$ jest liczbą podzielną przez 9 dla każdej liczby naturalnej n.

5. Liczba rzeczywista x jest taka, że $\cos x = \sqrt{3} - 1$. Wówczas

   .... $\sin x = 2\sqrt{3} - 3$,

   .... $\cos 2x = 7 - 4\sqrt{3}$,

   .... $\cos 3x = 21\sqrt{3} - 38$.

[1] *W zadaniach testowych podano trzy (na ogół logicznie niezależne) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów i wpisać słowo* **TAK** *lub* **NIE** *w miejscu zaznaczonym kropkami.* Zadania testowe punktowane są następująco: **1** punkt za każdą poprawną odpowiedź, **0** punktów za brak odpowiedzi, **−1** punkt za odpowiedź niepoprawną i **1** punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w każdym zadaniu.

6. Liczba a jest parametrem rzeczywistym. Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U}(a): \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |x+y| + |x-y| = a. \end{cases}$$

Wówczas

.... dla każdego $a > 0$ układ $\mathcal{U}(a)$ ma rozwiązania,

.... istnieje co najmniej 2012 takich wartości a, że układ $\mathcal{U}(a)$ ma dokładnie 8 rozwiązań,

.... istnieją takie trzy wartości a, że układ $\mathcal{U}(a)$ ma dokładnie cztery rozwiązania.

7. Istnieje

.... ciąg arytmetyczny, którego pewne wyrazy są równe $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$,

.... ciąg geometryczny, którego kolejne wyrazy są równe $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$,

.... rosnący ciąg (x_n) o wyrazach niewymiernych, że $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_5 = \sqrt{6}$.

8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ciąg (a_n) dany jest przez $a_n = \{n\alpha\}$, a ciąg (b_n) dany jest przez $b_n = \{n\beta\}$. Przez $\{u\}$ oznaczamy część ułamkową liczby u. Wówczas

.... jeżeli α jest liczbą wymierną, to ciąg (a_n) jest okresowy,

.... jeżeli ciąg (b_n) jest stały, to $\beta = 0$,

.... jeżeli $a_n \neq b_n$ dla każdego $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, to $\beta - \alpha$ jest liczbą niewymierną.

9. n-ty wyraz ciągu $02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, \ldots$ jest liczbą dwucyfrową składającą się z dwóch ostatnich cyfr dziesiętnych liczby 2^n. Wówczas

.... pewien wyraz tego ciągu jest równy 11,

.... nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest równych 22,

.... nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest równych 44.

10. Niech $A_n = (1+n)^n - 1$ dla $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wówczas

.... $n^2 | A_n$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n,

.... $n^3 | A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in \{1, 2\}$,

.... $3 | A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3 | n$.

11. Liczbę naturalną nazwiemy *liczbą OK*, gdy liczba jej dzielników naturalnych jest liczbą **nieparzystą**. Wówczas

.... liczba 64 jest liczbą OK,

.... istnieje tylko skończenie wiele naturalnych liczb OK,

.... istnieją dokładnie 44 całkowite dodatnie liczby OK mniejsze niż 2012.

12. Nierównoramienny trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$ jest wpisany w okrąg $\mathcal{K}$ o środku O. Oznaczamy przez A_s środek krótszego łuku $\overset{\smile}{BC}$, przez B_s środek krótszego łuku $\overset{\smile}{AC}$, a przez C_s środek krótszego łuku $\overset{\smile}{AB}$. Wówczas

.... $\overline{A_sA}$ jest dwusieczną kąta $\sphericalangle B_sA_sC_s$,

.... trójkąt $\triangle A_sB_sC_s$ jest równoramienny,

.... kąt środkowy $\sphericalangle AOC_s$ ma miarę $\gamma = m(\sphericalangle C)$.

13. Punkty A', B', C' są spodkami wysokości trójkąta ostrokątnego $\triangle ABC$ mającego pole S i obwód $2p$. Wówczas

.... trójkąt $\triangle A'B'C'$ jest ostrokątny,

.... pole trójkąta $\triangle A'B'C'$ jest równe $S/4$,

.... obwód trójkąta $\triangle A'B'C'$ jest równy p.

14. Kula $\mathcal{K}$ jest wpisana w ostrosłup $ABCDS$ o podstawie czworokątnej $ABCD$. Punkty U, V, W i Z są punktami styczności kuli $\mathcal{K}$ ze ścianami $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ i $\triangle DAS$ odpowiednio. Wówczas

.... podstawa $ABCD$ tego ostrosłupa jest rombem,

.... punkty U, V, W, Z leżą na jednej płaszczyźnie,

.... $m(\sphericalangle VUZ) + m(\sphericalangle VWZ) = 180°$.

15. Wykonujemy obrót wokół punktu $(1,\, 0)$ o kąt $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a następnie obrót wokół punktu $(-1,\, 0)$ o kąt $90°$ również zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W wyniku tego

.... punkt $(2,\, 0)$ zostanie przekształcony w punkt $(-2,\, -2)$,

.... prosta $x = 1$ zostanie przekształcona w prostą $x = -1$,

.... prosta $y = -2012$ zostanie przekształcona w prostą $y = 2010$.

16. Trójkąty prostokątne $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ $(m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle C') = 90°)$ są takie, że zachodzi równość $|AB|^2 S(\triangle A'B'C') = |A'B'|^2 S(\triangle ABC)$, gdzie $S(\mathcal{T})$ oznacza pole trójkąta $\mathcal{T}$. Wówczas

.... te trójkąty są równoramienne,

.... te trójkąty są przystające,

.... te trójkąty są podobne.

17. Każdy punkt kratowy płaszczyzny (czyli punkt o obu współrzędnych całkowitych) jest jednego z dwóch kolorów. Wówczas istnieje

.... prostokąt o wierzchołkach będących punktami kratowymi jednego koloru,

.... odcinek długości 7, którego oba końce są punktami kratowymi jednego koloru,

.... trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są punktami kratowymi jednego koloru.

18. Jeżeli $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją, to przez g_a oznaczamy funkcję $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której wykres powstaje z wykresu funkcji g przez odbicie w prostej $y = a$. Wówczas

.... jeżeli f jest funkcją rosnącą, to f_{2012} jest funkcją malejącą,

.... zachodzi równość $(f_a)_b = (f_b)_a$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$,

.... istnieje taka funkcja f, że $f_0 = f_1$.

19. Ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych niezerowych nazywa się *ciągiem harmonicznym*, gdy dla dowolnego $n \geq 2$ zachodzi równość $a_n = 2/(a_{n-1}^{-1} + a_{n+1}^{-1})$. Przy takiej definicji

.... ciąg (h_n) dany wzorem $h_n = 1/n$ jest ciągiem harmonicznym,

.... istnieją rosnące ciągi harmoniczne,

.... jeżeli (a_n) jest ciągiem harmonicznym i $a_2 = a_3$, to $a_{2012} = a_1$.

20. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \{x^2\}$, gdzie $\{u\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej u. Wówczas

.... funkcja f jest funkcją parzystą,

.... funkcja f jest funkcją okresową,

.... równanie $4f(x) = x$ ma dokładnie 4 rozwiązania.

2. ZADANIA TEKSTOWE[2]

1. Wydrukowano milion losów pewnej loterii. Losy te są ponumerowane numerami od 000000 do 999999. Udowodnić, że ilość losów *szczęśliwych*, czyli takich, których numer ma sumę cyfr równą 27, jest dokładnie równa ilości takich losów, że suma pierwszych trzech cyfr ich numeru jest taka sama jak suma ostatnich trzech cyfr tego numeru.

2. Trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ są odpowiednimi dwusiecznymi, ma tę własność, że okrąg opisany na $\triangle BEF$ ma środek leżący na prostej l_{AC}. Obliczyć miarę kąta $\sphericalangle ACB$.

P O W O D Z E N I A !

[2] *Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.* Za każde zadanie tekstowe można zdobyć minimalnie **0** a maksymalnie **10** punktów.