O D P O W I E D Z I i R O Z W I Ą Z A N I A

1. W płaszczyźnie danych jest 2013 prostych, spośród których k jest równoległych do prostej $x = 0,$ pozostałe są równoległe do prostej $x = y.$ Oznaczmy przez $S(k)$ ilość obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę. Wówczas

...**TAK**.... $S(7) = S(2006)$

...**NIE**.... $S(k) = k(2013 - k)$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 2012$

...**NIE**.... suma $S(0) + S(1) + \ldots + S(2013)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(u) = \cos \frac{\pi}{3+u^2}.$ Wówczas

...**NIE**.... najmniejszą wartością funkcji f jest $\sqrt{3}/2$

...**TAK**.... f jest funkcją parzystą

...**NIE**.... największą wartością funkcji f jest 1

3. Ciąg nieskończony (a_n) zadany jest przez $a_n = \lfloor n - \sqrt{n} \rfloor$ dla $n = 1, 2, \ldots.$ Wówczas

...**TAK**.... ciąg (a_n) jest ciągiem niemalejącym

...**TAK**.... ciąg (a_n) przyjmuje każdą nieujemną wartość całkowitą

...**TAK**.... $a_k = a_{k+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest kwadratem liczby całkowitej

4. Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ zbiór wszystkich wielomianów $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, których współczynniki a_j należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}.$ Wówczas

...**NIE**.... w zbiorze $\mathcal{W}$ jest dokładnie 3^{n+1} wielomianów stopnia n

...**TAK**.... istnieje co najmniej 2013 takich wielomianów $f \in \mathcal{W},$ że $f(2) = -2013$

...**TAK**.... dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ istnieje **dokładnie jeden** taki wielomian $f \in \mathcal{W},$ że $f(3) = a$

5. Funkcja wielomianowa $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f_a(x) = x^3 + ax.$ Wówczas

...**NIE**.... f_a jest funkcją rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 1$

...**NIE**.... f_a jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$

...**TAK**.... f_a ma trzy różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$

6. Pewna wysokość trójkąta $\mathcal{T}_1$ dzieli go na dwa trójkąty $\mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_3$ podobne do $\mathcal{T}_1.$ Niech D_j i R_j oznaczają (odpowiednio) pole koła wpisanego w trójkąt $\mathcal{T}_j$ i promień okręgu opisanego na $\mathcal{T}_j$ dla $j = 1, 2, 3.$ Wówczas

...**TAK**.... $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$

...**NIE**.... $D_1^2 = D_2^2 + D_3^2$

...**TAK**.... trójkąt $\mathcal{T}_1$ jest trójkątem prostokątnym

7. Mamy 5 kolorów ponumerowanych liczbami $0, 1, 2, 3, 4.$ Malujemy nimi punkty kratowe na płaszczyźnie tak, że punkt (x, y) otrzymuje kolor k-ty, gdzie k jest resztą z dzielenia liczby $3x + y$ przez $5.$ Wówczas

...**NIE**.... najmniejsza niezerowa odległość między punktami jednego koloru wynosi 5

...**TAK**.... pole równoległoboku o wierzchołkach jednego koloru jest liczbą całkowitą

...**TAK**.... jeżeli na pewnej prostej leżą punkty kolorów 0 i 1, to na tej prostej leży co najmniej jeden punkt koloru 2

8. Jeżeli $\mathcal{T}_n$ jest trójkątem, to przez $\mathcal{T}_{n+1}$ oznaczamy trójkąt, którego trzema bokami są odcinki przystające do trzech środkowych trójkąta $\mathcal{T}_n$. Wtedy dla dowolnego trójkąta $\mathcal{T}_1$ o polu równym 1

...**NIE**.... trójkąty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ są podobne

...**TAK**.... trójkąty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_3$ są podobne

...**NIE**.... suma pól trójkątów $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_{2013}$ jest mniejsza niż $3,99$

9. Sześciokąt wypukły $\mathcal{S} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jest taki, że pola wszystkich sześciu trójkątów $\triangle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ są równe (indeksy liczymy modulo 6). Wówczas

...**NIE**.... przekątne główne $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_5}$, $\overline{A_3A_6}$ przechodzą przez jeden punkt

...**NIE**.... pole sześciokąta $\mathcal{S}$ jest dwa razy większe niż pole trójkąta $\triangle A_2A_4A_6$

...**NIE**.... sześciokąt $\mathcal{S}$ jest foremny

10. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Oznaczmy przez $\mathbb{P}(n)$ zbiór wszystkich liczb pierwszych, które dają się przedstawić w postaci $x^2 + ny^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wówczas

...**TAK**.... zbiór $\mathbb{P}(0)$ jest zbiorem pustym

...**NIE**.... zbiór $\mathbb{P}(-1)$ jest zbiorem skończonym

...**NIE**.... liczba 13 jest jedyną liczbą zbioru $\mathbb{P}(1) \cap \mathbb{P}(-1)$

11. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Wówczas

...**NIE**.... $a + b + c \geq 3$

...**NIE**.... $ab + bc + ca \geq 3$

...**TAK**.... $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

12. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest następująco: $f(k\pi/2) = -k^2$ dla każdej liczby całkowitej k i wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ dla $x \notin \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Wówczas

...**NIE**.... funkcja f jest funkcją parzystą

...**TAK**.... równanie $f(x) = 2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań

...**NIE**.... równanie $f(x) = -4$ ma dokładnie dwa rozwiązania w liczbach rzeczywistych

13. Przez $\varphi(n)$ oznacza się ilość liczb naturalnych $\leq n$ i względnie pierwszych z n $(n \in \mathbb{N})$. Wówczas

...**NIE**.... ciąg $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ jest ciągiem rosnącym

...**TAK**.... jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $\varphi(p^{2013}) \geq p^{2012}$

...**TAK**.... istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że $2\varphi(n) \leq n$

14. Niech $\lfloor x \rfloor$ oznacza *część całkowitą* liczby rzeczywistej x, a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza *część ułamkową* liczby x. Wówczas

...**TAK**.... $\lfloor \{x\} \rfloor = \{ \lfloor x \rfloor \}$ dla każdej liczby rzeczywistej x

...**NIE**.... $\{|x|\} = |\{x\}|$ dla każdej liczby rzeczywistej x

...**NIE**.... $\{-x\} = -\{x\}$ dla każdej liczby rzeczywistej x

15. Niech $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą bądź równą x (tzw. *sufit* liczby $x \in \mathbb{R}$). Niech $\langle x \rangle = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$. Wówczas

...**TAK**.... funkcja dana wzorem $c(x) = 1 - 4\langle x \rangle$ jest parzystą funkcją okresową

...**TAK**.... funkcja dana wzorem $s(x) = 1 - 4\langle x - \frac{1}{4} \rangle$ jest nieparzystą funkcją okresową

...**TAK**.... $|c(x) + s(x)| \leq 1$ dla $s(x)$, $c(x)$ określonych powyżej i każdego $x \in \mathbb{R}$

16. Długości boków i promień okręgu wpisanego pewnego trójkąta prostokątnego $\mathcal{T}$ są liczbami wymiernymi. Wówczas

...**TAK**.... pole trójkąta $\mathcal{T}$ jest liczbą wymierną

...**TAK**.... długość co najmniej jednej środkowej trójkąta $\mathcal{T}$ jest liczbą wymierną

...**TAK**.... promień okręgu opisanego na $\mathcal{T}$ jest liczbą wymierną

17. Rozważmy równanie $x + y = 2013$. Wówczas równanie to ma

...**NIE**.... dokładnie 2013 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich

...**NIE**.... skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych

...**TAK**.... skończenie wiele takich rozwiązań (x, y), że $2013x$ i $2013y$ są liczbami naturalnymi

18. Dziesięć mniszek (*Lymantria monacha*): Adoracja, Banicja, Celebracja, Dominacja, Emocja, Fiksacja, Gradacja, Halucynacja, Indoktrynacja i Kasacja siedzi na długim drucie we wskazanej kolejności. *Ruch* polega na tym, że dwie z nich zamieniają się miejscami. Ponadto, wykonując pewną ilość *ruchów* w ciągu **jednej sekundy** potrafią się one ustawić w dowolnie wybranej kolejności. Wówczas

...**NIE**.... mogą się one dobrać w pary na $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ sposobów

...**TAK**.... mogą one, wykonawszy dokładnie 2013 ruchów, ustawić się w kolejności odwrotnej do kolejności początkowej, czyli w kolejności $K\ I\ H\ G\ F\ E\ D\ C\ B\ A$

...**NIE**.... w ciągu jednego miesiąca mogą zaprezentować cierpliwemu widzowi wszystkie możliwe permutacje

19. Ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ jest określony następująco: $a_0 = 2$ oraz a_{n+1} jest równe reszcie z dzielenia $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ przez 7. Wyrazy a_k traktujemy jak kolejne cyfry dziesiętne nieskończonego rozwnięcia $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ liczby rzeczywistej α. Wówczas

...**NIE**.... liczba α jest niewymierna

...**TAK**.... liczba α jest wymierna

...**NIE**.... $\alpha = 9/4$

20. Sfera $\mathcal{S}$ przecina oś Ox prostokątnego układu współrzędnych w punktach $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$, oś Oy w punktach $y_1 = 6$ i $y_2 = b$, a oś Oz w punktach $z_1 = 12$ i $z_2 = c$. Pewna prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych jest styczna do sfery $\mathcal{S}$ w punkcie A. Wówczas

...**NIE**.... $bc = 3$

...**NIE**.... długość promienia sfery $\mathcal{S}$ wynosi $2\sqrt{13}$

...**TAK**.... odległość punktu A od punktu $(0, 0, 0)$ wynosi $2\sqrt{3}$

ZADANIE 1. Dany jest odcinek $\overline{AB}$ o długości 1. Niech Γ oznacza ustaloną półpłaszczyznę o krawędzi AB. Rozważmy rodzinę wszystkich takich trójkątów $\triangle ABC$, że $C \in \Gamma$ i $m(\sphericalangle ACB) = 90°$. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$. Udowodnić, że wszystkie tak otrzymane punkty I leżą na jednym okręgu. Wyznaczyć promień tego okręgu.

Rozwiązanie. Udowodnimy lemat:

LEMAT. *Dwusieczna kąta $\sphericalangle C$ trójkąta $\triangle ABC$ przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punktach C i C_d. Wówczas: (1) punkt C_d jest środkiem łuku $\widehat{AB}$, (2) zachodzą równości $|C_dA| = |C_dI| = |C_dB|$, gdzie I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$.*

Dowód. Teza (1) jest wnioskiem z twierdzenia sinusów: $|C_dA| = 2R\sin\gamma/2 = |C_dB|$. Dla dowodu tezy (2) wykonujemy bilans kątów:

$$m(\sphericalangle AIC_d) = m(\sphericalangle ICA) + m(\sphericalangle IAC) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = m(\sphericalangle BAC_d) + m(\sphericalangle IAB) = m(\sphericalangle IAC_d).$$

[Pierwsza równość wynika z twierdzenia o kącie zewnętrznym (w trójkącie $\triangle ICA$), druga równość wynika z faktu, że h_{AI} i h_{CI} są dwusiecznymi, trzecia z faktu, że h_{AI} jest dwusieczną i z twierdzenia Apolloniusza o równości kątów wpisanych $\sphericalangle BCC_d$ i $\sphericalangle BAC_d$, a czwarta jest oczywista.] Wobec tego, na mocy *pons asinorum*, trójkąt $\triangle AIC_d$ jest równoramienny. Podobnie dowodzimy, że trójkąt $\triangle BIC_d$ jest równoramienny. ▶

Z tego lematu natychmiast wynika teza zadania: wszystkie punkty I leżą na okręgu $\mathcal{K} = \mathcal{K}(C_d, |C_dA|)$. Ponadto, ponieważ w naszym przypadku $\triangle ABC_d$ jest prostokątny równoramienny, więc promień okręgu $\mathcal{K}$ jest równy $\sqrt{2}/2$. ♦

ZADANIE 2. Oznaczmy przez $\mathcal{W}_n$ zbiór wszystkich słów n-literowych zbudowanych z liter a, b, c bez fragmentów aaa, bbb ani ccc. Wyznaczyć ilość elementów zbioru $\mathcal{W}_8$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez w_n ilość elementów zbioru $\mathcal{W}_n$. Ponieważ jest jasne, że $\mathcal{W}_1 = \{a, b, c\}$ i $\mathcal{W}_2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$, więc mamy $w_1 = 3$ i $w_2 = 9$. Niech więc $n \geq 3$. Oznaczmy przez $\mathcal{D}_n$ podzbiór zbioru $\mathcal{W}_n$ składający się ze słów o dwóch różnych (*different*) ostatnich literach, a przez $\mathcal{E}_n$ podzbiór zbioru $\mathcal{W}_n$ składający się ze słów o dwóch równych (*equal*) ostatnich literach. Niech $d_n = |\mathcal{D}_n|$, $e_n = |\mathcal{E}_n|$. Oczywiście $d_1 = 3$, $e_1 = 0$, $d_2 = 6$, $e_2 = 3$ i $w_n = d_n + e_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Chwila zastanowienia pozwala napisać równości:

$$\begin{cases} d_{n+1} = 2d_n + 2e_n, \\ e_{n+1} = d_n. \end{cases}$$

Stąd z łatwością wykazujemy, że ciąg (w_n) spełnia równanie rekurencyjne $w_{n+2} = 2w_{n+1} + 2w_n$. Warunki początkowe $w_1 = 3$, $w_2 = 9$ pozwalają wyznaczyć $w_8 = 3\,672$. To jest odpowiedź! ♦