LIV MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

09. 03. 2013 godz. 11.00 – 14.00

I. TEST[1]

1. W płaszczyźnie danych jest 2013 prostych, spośród których k jest równoległych do prostej $x = 0$, pozostałe są równoległe do prostej $x = y$. Oznaczmy przez $S(k)$ ilość obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę. Wówczas

.... $S(7) = S(2006)$

.... $S(k) = k(2013 - k)$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 2012$

.... suma $S(0) + S(1) + \ldots + S(2013)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(u) = \cos \dfrac{\pi}{3 + u^2}$. Wówczas

.... najmniejszą wartością funkcji f jest $\sqrt{3}/2$

.... f jest funkcją parzystą

.... największą wartością funkcji f jest 1

3. Ciąg nieskończony (a_n) zadany jest przez $a_n = \lfloor n - \sqrt{n} \rfloor$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wówczas

.... ciąg (a_n) jest ciągiem niemalejącym

.... ciąg (a_n) przyjmuje każdą nieujemną wartość całkowitą

.... $a_k = a_{k+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest kwadratem liczby całkowitej

4. Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ zbiór wszystkich wielomianów $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, których współczynniki a_j należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Wówczas

.... w zbiorze $\mathcal{W}$ jest dokładnie 3^{n+1} wielomianów stopnia n

.... istnieje co najmniej 2013 takich wielomianów $f \in \mathcal{W}$, że $f(2) = -2013$

.... dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ istnieje **dokładnie jeden** taki wielomian $f \in \mathcal{W}$, że $f(3) = a$

5. Funkcja wielomianowa $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f_a(x) = x^3 + ax$. Wówczas

.... f_a jest funkcją rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 1$

.... f_a jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$

.... f_a ma trzy różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$

[1] *W zadaniach testowych podano trzy (na ogół logicznie niezależne) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów i wpisać słowo* **TAK** *lub słowo* **NIE** *w miejscu zaznaczonym kropkami.* Zadania testowe p u n k t o w a n e są następująco: **1** punkt za każdą poprawną odpowiedź, **0** punktów za brak odpowiedzi, **–1** punkt za odpowiedź niepoprawną i **1** punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

6. Pewna wysokość trójkąta $\mathcal{T}_1$ dzieli go na dwa trójkąty $\mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_3$ podobne do $\mathcal{T}_1$. Niech D_j i R_j oznaczają (odpowiednio) pole koła wpisanego w trójkąt $\mathcal{T}_j$ i promień okręgu opisanego na $\mathcal{T}_j$ dla $j = 1, 2, 3$. Wówczas

.... $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$

.... $D_1^2 = D_2^2 + D_3^2$

.... trójkąt $\mathcal{T}_1$ jest trójkątem prostokątnym

7. Mamy 5 kolorów ponumerowanych liczbami $0, 1, 2, 3, 4$. Malujemy nimi punkty kratowe na płaszczyźnie tak, że punkt (x, y) otrzymuje kolor o numerze będącym resztą z dzielenia liczby $3x + y$ przez 5. Wówczas

.... najmniejsza niezerowa odległość między punktami jednego koloru wynosi 5

.... pole równoległoboku o wierzchołkach jednego koloru jest liczbą całkowitą

.... jeżeli na pewnej prostej leżą punkty kolorów 0 i 1, to na tej prostej leży co najmniej jeden punkt koloru 2

8. Jeżeli $\mathcal{T}_n$ jest trójkątem, to przez $\mathcal{T}_{n+1}$ oznaczamy trójkąt, którego trzema bokami są odcinki przystające do trzech środkowych trójkąta $\mathcal{T}_n$. Wtedy dla dowolnego trójkąta $\mathcal{T}_1$ o polu równym 1

.... trójkąty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ są podobne

.... trójkąty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_3$ są podobne

.... suma pól trójkątów $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_{2013}$ jest mniejsza niż $3,99$

9. Sześciokąt wypukły $\mathcal{S} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jest taki, że pola wszystkich sześciu trójkątów $\triangle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ są równe (indeksy liczymy modulo 6). Wówczas

.... przekątne główne $\overline{A_1A_4}, \overline{A_2A_5}, \overline{A_3A_6}$ przechodzą przez jeden punkt

.... pole sześciokąta $\mathcal{S}$ jest dwa razy większe niż pole trójkąta $\triangle A_2A_4A_6$

.... sześciokąt $\mathcal{S}$ jest foremny

10. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Oznaczmy przez $\mathbb{P}(n)$ zbiór wszystkich liczb pierwszych, które dają się przedstawić w postaci $x^2 + ny^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wówczas

.... zbiór $\mathbb{P}(0)$ jest zbiorem pustym

.... zbiór $\mathbb{P}(-1)$ jest zbiorem skończonym

.... liczba 13 jest jedyną liczbą zbioru $\mathbb{P}(1) \cap \mathbb{P}(-1)$

11. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Wówczas

.... $a + b + c \geq 3$

.... $ab + bc + ca \geq 3$

.... $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

12. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest następująco: $f(k\pi/2) = -k^2$ dla każdej liczby całkowitej k i wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ dla $x \notin \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Wówczas

.... funkcja f jest funkcją parzystą

.... równanie $f(x) = 2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań

.... równanie $f(x) = -4$ ma dokładnie dwa rozwiązania w liczbach rzeczywistych

13. Przez $\varphi(n)$ oznacza się ilość liczb naturalnych $\leq n$ i względnie pierwszych z n $(n \in \mathbb{N})$. Wówczas

.... ciąg $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ jest ciągiem rosnącym

.... jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $\varphi(p^{2013}) \geq p^{2012}$

.... istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że $2\varphi(n) \leq n$

14. Niech $\lfloor x \rfloor$ oznacza *część całkowitą* liczby rzeczywistej x, a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza *część ułamkową* liczby x. Wówczas

.... $\lfloor \{x\} \rfloor = \{\lfloor x \rfloor\}$ dla każdej liczby rzeczywistej x

.... $\{|x|\} = |\{x\}|$ dla każdej liczby rzeczywistej x

.... $\{-x\} = -\{x\}$ dla każdej liczby rzeczywistej x

15. Niech $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą bądź równą x (tzw. *sufit* liczby $x \in \mathbb{R}$). Niech $\langle x \rangle = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$. Wówczas

.... funkcja dana wzorem $c(x) = 1 - 4\langle x \rangle$ jest parzystą funkcją okresową

.... funkcja dana wzorem $s(x) = 1 - 4\langle x - \frac{1}{4} \rangle$ jest nieparzystą funkcją okresową

.... $|c(x) + s(x)| \leq 1$ dla $s(x)$, $c(x)$ określonych powyżej i każdego $x \in \mathbb{R}$

16. Długości boków i promień okręgu wpisanego pewnego trójkąta prostokątnego $\mathcal{T}$ są liczbami wymiernymi. Wówczas

.... pole trójkąta $\mathcal{T}$ jest liczbą wymierną

.... długość co najmniej jednej środkowej trójkąta $\mathcal{T}$ jest liczbą wymierną

.... promień okręgu opisanego na $\mathcal{T}$ jest liczbą wymierną

17. Rozważmy równanie $x + y = 2013$. Równanie to ma

.... dokładnie 2013 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich

.... skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych

.... skończenie wiele takich rozwiązań (x, y), że $2013x$ i $2013y$ są liczbami naturalnymi

18. Dziesięć mniszek (*Lymantria monacha*): Adoracja, Banicja, Celebracja, Dominacja, Emocja, Fiksacja, Gradacja, Halucynacja, Indoktrynacja i Kasacja siedzi na długim drucie we wskazanej kolejności. *Ruch* polega na tym, że dwie z nich zamieniają się miejscami. Ponadto, wykonując pewną ilość *ruchów* w ciągu **jednej sekundy** potrafią się one ustawić w dowolnie wybranej kolejności. Wówczas

.... mogą się one dobrać w pary na $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ sposobów

.... mogą one, wykonawszy dokładnie 2013 ruchów, ustawić się w kolejności odwrotnej do kolejności początkowej, czyli w kolejności: $K\ I\ H\ G\ F\ E\ D\ C\ B\ A$

.... w ciągu jednego miesiąca mogą zaprezentować cierpliwemu widzowi wszystkie możliwe permutacje

19. Ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ jest określony następująco: $a_0 = 2$ oraz a_{n+1} jest równe reszcie z dzielenia $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ przez 7. Wyrazy a_k traktujemy jak kolejne cyfry dziesiętne nieskończonego rozwnięcia $a_0,\ a_1a_2a_3\ldots$ liczby rzeczywistej α. Wówczas

.... liczba α jest niewymierna

.... liczba α jest wymierna

.... $\alpha = 9/4$

20. Sfera $\mathcal{S}$ przecina oś Ox prostokątnego układu współrzędnych w punktach $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$, oś Oy w punktach $y_1 = 6$ i $y_2 = b$, a oś Oz w punktach $z_1 = 12$ i $z_2 = c$. Pewna prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych jest styczna do sfery $\mathcal{S}$ w punkcie A. Wówczas

.... $bc = 3$

.... długość promienia sfery $\mathcal{S}$ wynosi $2\sqrt{13}$

.... odległość punktu A od punktu $(0,\ 0,\ 0)$ wynosi $2\sqrt{3}$

II. ZADANIA TEKSTOWE[2]

ZADANIE 1. Dany jest odcinek $\overline{AB}$ o długości 1. Niech Γ oznacza ustaloną półpłaszczyznę o krawędzi AB. Rozważmy rodzinę wszystkich takich trójkątów $\triangle ABC$, że $C \in \Gamma$ oraz $m(\sphericalangle ACB) = 90°$. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$. Udowodnić, że wszystkie tak otrzymane punkty I leżą na jednym okręgu. Wyznaczyć promień tego okręgu.

ZADANIE 2. Oznaczmy przez $\mathcal{W}_n$ zbiór wszystkich słów n-literowych zbudowanych z liter $a,\ b,\ c$ bez fragmentów aaa, bbb ani ccc. Wyznaczyć ilość elementów zbioru $\mathcal{W}_8$.

Uwaga. Używane oznaczenia: **(1)** $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych, **(2)** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\ \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych, **(3)** $\mathbb{Q}$ zbiór liczb wymiernych, **(4)** $\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych. Ponadto: **(5)** $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej x, czyli jedyna taka liczba całkowita, że $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, **(6)** $\lceil y \rceil$ – sufit liczby rzeczywistej y, zobacz zadanie testowe **15**, **(7)** $\{z\}$ – część ułamkowa liczby rzeczywistej z, zobacz zadanie testowe **14**.

POWODZENIA !!!

[2] *Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.* Zadania tekstowe są punktowane w skali od **0** do **10** punktów.