ROZWIĄZANIA

1. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ TESTOWYCH

1. Dla dowolnych zbiorów $A,\ B,\ C$ zachodzi równość

...TAK.. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$,

...TAK.. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

...TAK.. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Wyrażenie $abcdefg$ jest zapisem liczby naturalnej K w systemie 7-kowym. W szczególności cyfry $a,\ b,\ \ldots\ ,\ g$ są elementami zbioru $\{0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 6\}$. Wówczas

...TAK.. $8|K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $8|(a-b+c-d+e-f+g)$,

...NIE... $49|K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $7|(f+g)$,

...TAK.. $6|K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6|(a+b+c+d+e+f+g)$.

3. Dane są liczby dodatnie $u,\ w$. Punkty $A=(u,\ w,\ 0)$, $B=(w,\ 0,\ u)$ i $C=(0,\ u,\ w)$ zadane są przez wskazane współrzędne w prostokątnym układzie współrzędnych w przestrzeni. Wówczas

...NIE... trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem równobocznym wtedy i tylko wtedy, gdy $u=w$,

...TAK.. płaszczyzna ABC jest równoległa do płaszczyzny o równaniu $x+y+z=0$,

...TAK.. pole trójkąta $\triangle ABC$ wynosi $\dfrac{\sqrt{3}(u^3+w^3)}{2(u+w)}$.

4. Funkcja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x)=\sin x\cdot\sin cx$, gdzie $c=20,(14)$ (nieskończony dziesiętny ułamek okresowy). Wówczas

...TAK.. funkcja f jest funkcją okresową,

...TAK.. funkcja f jest funkcją parzystą,

...NIE... równanie $f(x)=1$ ma rozwiązania.

5. Funkcja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x)=\min\{|x-2014|,\ |x+2014|\}$. Wówczas

...TAK.. istnieją dokładnie dwie wartości x, dla których $f(x)=0$,

...TAK.. funkcja f jest funkcją parzystą,

...NIE... równanie $f(x)=\frac{1}{2}x$ ma dokładnie cztery rozwiązania.

6. Złożenie trzech symetrii osiowych płaszczyzny

...TAK.. jest izometrią,

...NIE... może być translacją (przesunięciem) o niezerowy wektor,

...NIE... może być obrotem wokół pewnego punktu.

7. Suma każdych dwóch z danych trzech liczb całkowitych jest podzielna przez 14. Wówczas

...NIE... każda z tych liczb jest podzielna przez 14,

...NIE... suma tych trzech liczb jest podzielna przez 14,

...TAK.. różnica każdych dwóch z tych liczb jest podzielna przez 14

8. Dla danego nieskończonego ciągu zbiorów (X_n), $n = 1, 2, \ldots,$ oznaczamy

$$\bigcap X_n = \{x : x \in X_n \text{ dla każdego } n\}, \qquad \bigcup X_n = \{x : x \in X_n \text{ dla pewnego } n\}.$$

Zbiór $\bigcap X_n$ nazywamy ***przekrojem*** lub ***iloczynem*** zbiorów X_n, a zbiór $\bigcup X_n$ nazywamy ***sumą*** tych zbiorów. Przy tych oznaczeniach mamy:

...TAK. jeżeli $X_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$, $Y_n = [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]$, to $\bigcap X_n = \bigcap Y_n$,

...TAK. jeżeli $X_n = [n; +\infty)$, to $\bigcap X_n = \varnothing$,

...NIE.. jeżeli $X_n = [\frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}]$, to $\bigcup X_n = [0; 2]$.

9. Dany jest trójmian kwadratowy $F(X) = X^2 + 2014X - 1$. Wówczas

...NIE... $F(X)$ ma dwa różne pierwiastki będące liczbami wymiernymi,

...NIE... $F(X)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych,

...TAK.. jeżeli α, β są pierwiastkami trójmianu $F(X)$, to $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ jest liczbą całkowitą.

10. Jeżeli $\boldsymbol{a} = (a_n)$ jest dowolnym ciągiem (liczbowym), to ciąg $d(\boldsymbol{a})$, którego n-tym wyrazem jest różnica $a_{n+1} - a_n$ nazywa się ***pochodną*** ciągu $\boldsymbol{a}$. Wówczas

...TAK.. $\boldsymbol{a}$ jest ciągiem arytmetycznym $\iff$ $d(\boldsymbol{a})$ jest ciągiem stałym,

...NIE... $\boldsymbol{a}$ jest ciągiem geometrycznym $\iff$ $d(\boldsymbol{a})$ jest ciągiem arytmetycznym,

...NIE... $\boldsymbol{a} = d(\boldsymbol{a})$ $\iff$ $\boldsymbol{a}$ jest ciągiem geometrycznym

11. Dane są liczby rzeczywiste $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Wówczas

...NIE... jeżeli $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ są liczbami wymiernymi, to obie liczby α, β są wymierne,

...NIE... jeżeli $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ są liczbami całkowitymi, to obie liczby α, β są całkowite,

...NIE... jeżeli $\alpha^n + \beta^n$ są całkowite dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to obie liczby α, β są całkowite.

12. Dany jest parametr rzeczywisty α. Rozważmy równanie $\cos(\alpha - x) = 2014 \cos\alpha \cos x$. Wówczas

...NIE.. istnieje α, dla którego równanie to nie ma rozwiązań,

...NIE.. istnieje α, dla którego równanie to ma dokładnie 2014 rozwiązań,

...TAK. istnieje α, dla którego równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań.

13. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że wielomiany $X^3 + aX^2 + bX + c$, $X^3 + bX^2 + cX + a$ i $X^3 + cX^2 + aX + b$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty ξ. Wówczas

...TAK. jeżeli $\xi = 0$, to $a + b + c = 0$,

...NIE.. $a + b + c = -1$,

...TAK. jeżeli $|a - b| + |b - c| + |c - a| > 0$, to $\xi = 1$.

14. Na płaszczyźnie narysowano 2014 czworokątów wypukłych. Boki każdego z tych czworokątów mają długości ze zbioru $\{3^k : 0 \leq k \leq 5\}$. Wówczas

...NIE.. wszystkie narysowane czworokąty są równoległobokami,

...NIE.. wśród tych czworokątów są co najmniej dwa podobne,

...NIE.. wśród tych czworokątów może być taki, którego każdy bok ma inną długość.

15. Punkt M leżący wewnątrz danego czworokąta wypukłego $ABCD$ nazwiemy *punktem miłym* czworokąta $ABCD$, gdy $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BCM} = S_{\triangle CDM} = S_{\triangle DAM}$. Wtedy

...TAK. jeżeli punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ jest jego punktem miłym, to $ABCD$ jest równoległobokiem,

...TAK. każdy deltoid ma punkt miły,

...NIE.. istnieje taki czworokąt wypukły, który ma więcej niż jeden punkt miły.

16. Punkt G jest środkiem ciężkości trójkąta $\mathcal{T}$, punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $\mathcal{T}$, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\mathcal{T}$. Wtedy, jeżeli prosta k

...NIE.. dzieli trójkąt $\mathcal{T}$ na dwie części o równych polach, to $G \in k$,

...NIE.. dzieli obwód trójkąta $\mathcal{T}$ na dwie równe części, to $I \in k$,

...NIE.. przechodzi przez punkt O, to $k \cap \mathcal{T}$ jest zbiorem niepustym.

17. Trójkąt $\triangle ABC$ jest wpisany w okrąg $\mathcal{K}$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle C$ przecina okrąg $\mathcal{K}$ w punktach C i X. Wówczas

...NIE... $\overline{CX}$ jest średnicą okręgu $\mathcal{K}$,

...TAK.. $|AX| = |BX|$,

...TAK.. $|AX| + |BX| = 2|IX|$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

18. Dany jest podzbiór

$$\mathcal{W} = \{(x,\, y,\, z) :\ |x - 2013| + 2|y - 2014| + 3|z - 2015| \leq 6\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas

...TAK. $\mathcal{W}$ jest ośmiościanem,

...TAK. $\mathcal{W}$ ma środek symetrii,

...NIE.. objętość zbioru $\mathcal{W}$ wynosi 36.

19. Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem *typu QIQ*, gdy jego wyrazy o wskaźnikach nieparzystych są wymierne i wyrazy o wskaźnikach parzystych są niewymierne. Wówczas

...NIE.. istnieje ciąg arytmetyczny typu *QIQ*

...TAK. istnieje ciąg geometryczny typu *QIQ*

...NIE.. suma dwóch ciągów typu *QIQ* jest ciągiem typu *QIQ*

20. Dany jest zbiór $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{Z} : (n^2 + 1) | (2013n + 2014)\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych. Wówczas

...TAK.. $\mathcal{A}$ jest zbiorem niepustym,

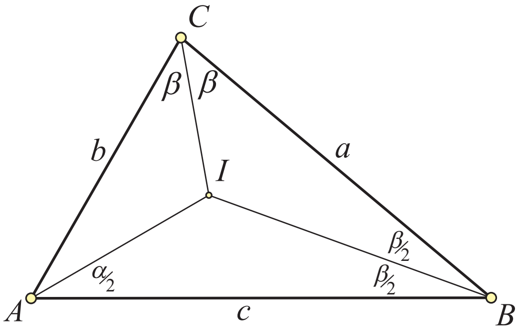
...NIE... jeżeli $n \in \mathcal{A}$, to $-n \in \mathcal{A}$,

...NIE... $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym.

2. ROZWIĄZANIA ZADAŃ TEKSTOWYCH

ZADANIE 1. W trójkącie $\triangle ABC$ zachodzą równości $m(\sphericalangle ICB) = 2m(\sphericalangle IBC)$ i $|BI| = |AC|$ (I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$). Wyznaczyć $m(\sphericalangle A)$.

Rozwiązanie. Pokażemy dwa sposoby rozumowania.



Sposób 1. Sytuacja jest przedstawiona na rysunku. Dzięki twierdzeniu sinusów w trójkącie $\triangle ABI$ mamy

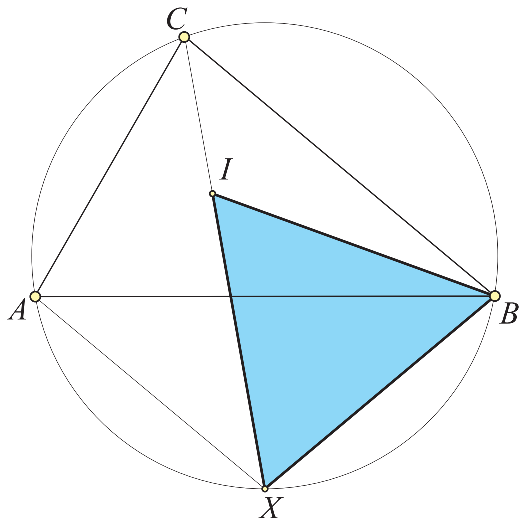
$$\frac{|IB|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AB|}{\sin(\sphericalangle AIB)} = \frac{c}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$$

czyli, uwzględniając założenia $|BI| = b$ oraz $\beta = \frac{\gamma}{2}$, otrzymujemy, dzięki elementarnej trygonometrii:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{c}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

Wobec tego, $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, czyli $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

Sposób 2. Zawodnik, który prawidłowo rozwiązał zadanie 17 z testu może wyznaczyć kąt $\sphericalangle A$ rozumując następująco:



(1) czworokąt $AXBC$ jest trapezem [to wynika z równości kątów naprzemianległych $m(\sphericalangle CBA) = m(\sphericalangle XCB) = m(\sphericalangle XAB)$, gdzie pierwsza równość wynika z założenia, a druga z równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku].

(2) ponieważ $|AC| = |XB|$ [własność trapezu cyklicznego], więc $|XB| = |BI|$.

(3) ponieważ jednocześnie $|XI| = |XB|$ [zobacz test 17.3, lub $\mathbb{GEO}$], więc trójkąt $\triangle BXI$ jest równoboczny.

(4) więc $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle CXB) = 60^\circ$.

ZADANIE 2. Dany jest ośmiokąt wypukły. Wybieramy pięć jego przekątnych, z których każde dwie są albo rozłączne albo mają tylko jeden punkt wspólny będący wierzchołkiem ośmiokąta. Wyznaczyć ilość możliwych takich wyborów.

Rozwiązanie. Będziemy rozumować trochę ogólniej. Oznaczymy przez E_n ilość możliwych wyborów maksymalnego zbioru przekątnych w n-kącie wypukłym spełniających warunek przecinania się co najwyżej w wierzchołku n-kąta. [Łatwo uzasadnić, że takich przekątnych jest dokładnie $n-3$ i że dzielą one ten n-kąt na $n-2$ trójkątów, oraz że każdy bok n-kąta jest bokiem **dokładnie** jednego z tych trójkątów.]

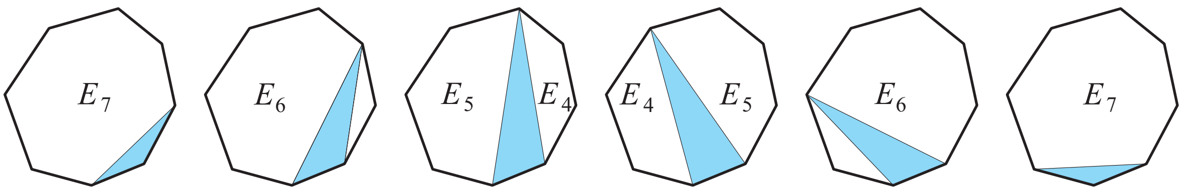
Znajdziemy równanie rekurencyjne, jakie spełnia ciąg (E_n). Ustalmy w tym celu bok $\overline{A_nA_1}$ wielokąta $A_1A_2\ldots A_n$. W każdym z rozważanych podziałów tego wielokąta za pomocą przekątnych, bok $\overline{A_nA_1}$ **jest bokiem** pewnego trójkąta $\mathcal{T} = \triangle A_1A_kA_n$, gdzie $k \in [\,2,\, n-1\,]$ jest **jednoznacznie** wyznaczonym indeksem. Ponieważ z jednej strony trójkąta $\mathcal{T}$ mamy k-kąt (wypukły) $A_1A_2\ldots A_k$, który można podzielić na E_k sposobów, zaś z drugiej strony trójkąta $\mathcal{T}$ mamy $(n-k+1)$-kąt wypukły $A_kA_{k+1}\ldots A_n$, który można **niezależnie** podzielić na E_{n-k+1} sposobów, więc mamy równość

$$E_n = E_{n-1} + E_{n-2} + E_{n-3}E_4 + \ \ldots\ + E_4E_{n-3} + E_{n-2} + E_{n-1}, \tag{1}$$

co, dla $n=8$, daje równość:

$$E_8 = E_7 + E_6 + E_5E_4 + E_4E_5 + E_6 + E_7 = 2E_7 + 2E_6 + 2E_5E_4,$$

zobacz rysunek.



Analogicznie znajdujemy:

$$E_7 = 2E_6 + 2E_5 + E_4E_4, \quad E_6 = 2E_5 + 2E_4, \quad E_5 = 2E_4 + 1. \tag{2}$$

Ponieważ jest jasne, że $E_3 = 1,\ E_4 = 2,$ więc możemy wyliczać kolejno:

$$E_5 = 5,\ E_6 = 14,\ E_7 = 42,$$

i, ostatecznie, $E_8 = 132$. To jest **odpowiedź**.