LV MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

22. 03. 2014

1. TEST

W każdym z poniższych 20 zadań testowych podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdej tezy i wpisać słowo TAK **lub** NIE **w miejscu zaznaczonym kropkami**.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, -1 punktów za odpowiedź niepoprawną, 0 punktów za brak odpowiedzi, i 1 punkt **dodatkowy** za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

.... $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$,

.... $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

.... $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Wyrażenie $abcdefg$ jest zapisem liczby naturalnej K w systemie 7-kowym. W szczególności cyfry $a, b, \ldots, g$ są elementami zbioru $\{0, 1, \ldots, 6\}$. Wówczas

.... $8|K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $8|(a-b+c-d+e-f+g)$,

.... $49|K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $7|(f+g)$,

.... $6|K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6|(a+b+c+d+e+f+g)$.

3. Dane są liczby dodatnie u, w. Punkty $A = (u, w, 0)$, $B = (w, 0, u)$ i $C = (0, u, w)$ zadane są przez wskazane współrzędne w prostokątnym układzie współrzędnych w przestrzeni. Wówczas

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem równobocznym wtedy i tylko wtedy, gdy $u = w$,

.... płaszczyzna ABC jest równoległa do płaszczyzny o równaniu $x + y + z = 0$,

.... pole trójkąta $\triangle ABC$ wynosi $\dfrac{\sqrt{3}(u^3 + w^3)}{2(u+w)}$.

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sin x \cdot \sin cx$, gdzie $c = 20,(14)$ (nieskończony dziesiętny ułamek okresowy). Wówczas

.... funkcja f jest funkcją okresową,

.... funkcja f jest funkcją parzystą,

.... równanie $f(x) = 1$ ma rozwiązania.

5. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \min\{|x - 2014|, |x + 2014|\}$. Wówczas

.... istnieją dokładnie dwie wartości x, dla których $f(x) = 0$,

.... funkcja f jest funkcją parzystą,

.... równanie $f(x) = \frac{1}{2}x$ ma dokładnie cztery rozwiązania.

6. Złożenie trzech symetrii osiowych płaszczyzny

.... jest izometrią,

.... może być translacją (przesunięciem) o niezerowy wektor,

.... może być obrotem wokół pewnego punktu.

Uwaga. Izometrią płaszczyzny nazywamy przekształcenie zachowujące odległości (tzn., $\mathbf{P}$ jest izometrią, gdy dla dowolnych punktów A, B płaszczyzny zachodzi równność $|A'B'| = |AB|$, gdzie $A' = \mathbf{P}(A)$, $B' = \mathbf{P}(B)$).

7. Suma każdych dwóch z danych trzech liczb całkowitych jest podzielna przez 14. Wówczas

.... każda z tych liczb jest podzielna przez 14,

.... suma tych trzech liczb jest podzielna przez 14,

.... różnica każdych dwóch z tych liczb jest podzielna przez 14

8. Dla danego nieskończonego ciągu zbiorów (X_n), $n = 1, 2, \ldots,$ oznaczamy

$$\bigcap X_n = \{x : x \in X_n \text{ dla każdego } n\}, \quad \bigcup X_n = \{x : x \in X_n \text{ dla pewnego } n\}.$$

Zbiór $\bigcap X_n$ nazywamy ***przekrojem*** lub ***iloczynem*** zbiorów X_n, a zbiór $\bigcup X_n$ nazywamy ***sumą*** tych zbiorów. Przy tych oznaczeniach mamy:

.... jeżeli $X_n = (\,-\frac{1}{n};\, \frac{1}{n}\,)$, $Y_n = [\,-\frac{1}{n};\, \frac{1}{n}\,]$, to $\bigcap X_n = \bigcap Y_n$,

.... jeżeli $X_n = [\,n;\, +\infty\,)$, to $\bigcap X_n = \varnothing$,

.... jeżeli $X_n = [\,\frac{1}{n};\, 2 - \frac{1}{n}\,]$, to $\bigcup X_n = [\,0;\, 2\,]$.

9. Dany jest trójmian kwadratowy $F(X) = X^2 + 2014X - 1$. Wówczas

.... $F(X)$ ma dwa różne pierwiastki będące liczbami wymiernymi,

.... $F(X)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych,

.... jeżeli α, β są pierwiastkami trójmianu $F(X)$, to $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ jest liczbą całkowitą.

10. Jeżeli $\boldsymbol{a} = (a_n)$ jest dowolnym ciągiem (liczbowym), to ciąg $d(\boldsymbol{a})$, którego n-tym wyrazem jest różnica $a_{n+1} - a_n$ $(n \in \{1, 2, 3, \ldots\})$ nazywa się ***pochodną*** ciągu $\boldsymbol{a}$. Wówczas

.... $\boldsymbol{a}$ jest ciągiem arytmetycznym $\iff$ $d(\boldsymbol{a})$ jest ciągiem stałym,

.... $\boldsymbol{a}$ jest ciągiem geometrycznym $\iff$ $d(\boldsymbol{a})$ jest ciągiem arytmetycznym,

.... $\boldsymbol{a} = d(\boldsymbol{a}) \iff \boldsymbol{a}$ jest ciągiem geometrycznym

11. Dane są liczby rzeczywiste $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Wówczas

.... jeżeli $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ są liczbami wymiernymi, to obie liczby α, β są wymierne,

.... jeżeli $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ są liczbami całkowitymi, to obie liczby α, β są całkowite,

.... jeżeli $\alpha^n + \beta^n$ są całkowite dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to obie liczby α, β są całkowite.

12. Dany jest parametr rzeczywisty α. Rozważmy równanie $\cos(\alpha - x) = 2014 \cos\alpha \cos x$. Wówczas

.... istnieje α, dla którego równanie to nie ma rozwiązań,

.... istnieje α, dla którego równanie to ma dokładnie 2014 rozwiązań,

.... istnieje α, dla którego równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań.

13. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że wielomiany $X^3 + aX^2 + bX + c$, $X^3 + bX^2 + cX + a$ i $X^3 + cX^2 + aX + b$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty ξ. Wówczas

.... jeżeli $\xi = 0$, to $a + b + c = 0$,

.... $a + b + c = -1$,

.... jeżeli $|a - b| + |b - c| + |c - a| > 0$, to $\xi = 1$.

14. Na płaszczyźnie narysowano 2014 czworokątów wypukłych. Boki każdego z tych czworokątów mają długości ze zbioru $\{3^k : 0 \le k \le 5\}$. Wówczas

.... wszystkie narysowane czworokąty są równoległobokami,

.... wśród tych czworokątów są co najmniej dwa podobne,

.... wśród tych czworokątów może być taki, którego każdy bok ma inną długość.

15. Punkt M leżący wewnątrz danego czworokąta wypukłego $ABCD$ nazwiemy *punktem miłym* czworokąta $ABCD$, gdy $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BCM} = S_{\triangle CDM} = S_{\triangle DAM}$. Wtedy

.... jeżeli punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ jest jego punktem miłym, to $ABCD$ jest równoległobokiem,

.... każdy deltoid ma punkt miły,

.... istnieje taki czworokąt wypukły, który ma więcej niż jeden punkt miły.

16. Punkt G jest środkiem ciężkości trójkąta $\mathcal{T}$, punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $\mathcal{T}$, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\mathcal{T}$. Wtedy, jeżeli prosta k

.... dzieli trójkąt $\mathcal{T}$ na dwie części o równych polach, to $G \in k$,

.... dzieli obwód trójkąta $\mathcal{T}$ na dwie równe części, to $I \in k$,

.... przechodzi przez punkt O, to $k \cap \mathcal{T}$ jest zbiorem niepustym.

17. Trójkąt $\triangle ABC$ jest wpisany w okrąg $\mathcal{K}$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle C$ przecina okrąg $\mathcal{K}$ w punktach C i X. Wówczas

.... $\overline{CX}$ jest średnicą okręgu $\mathcal{K}$,

.... $|AX| = |BX|$,

.... $|AX| + |BX| = 2|IX|$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

18. Dany jest podzbiór

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) : |x - 2013| + 2|y - 2014| + 3|z - 2015| \le 6\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas

.... $\mathcal{W}$ jest ośmiościanem,

.... $\mathcal{W}$ ma środek symetrii,

.... objętość zbioru $\mathcal{W}$ wynosi 36.

19. Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem *typu QIQ*, gdy jego wyrazy o wskaźnikach nieparzystych są wymierne i wyrazy o wskaźnikach parzystych są niewymierne. Wówczas

.... istnieje ciąg arytmetyczny typu *QIQ*

.... istnieje ciąg geometryczny typu *QIQ*

.... suma dwóch ciągów typu *QIQ* jest ciągiem typu *QIQ*

20. Dany jest zbiór $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{Z} : (n^2+1)|(2013n+2014)\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych. Wówczas

.... $\mathcal{A}$ jest zbiorem niepustym,

.... jeżeli $n \in \mathcal{A}$, to $-n \in \mathcal{A}$,

.... $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym.

2. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.

Punktacja: Za każde zadanie tekstowe można uzyskać ilość punktów od 0 do 10.

ZADANIE 1. W trójkącie $\triangle ABC$ zachodzą równości $m(\sphericalangle ICB) = 2 \cdot m(\sphericalangle IBC)$ oraz $|BI| = |AC|$ (I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$). Wyznaczyć $m(\sphericalangle BAC)$.

ZADANIE 2. Dany jest ośmiokąt wypukły. Wybieramy pięć jego przekątnych, z których każde dwie są albo rozłączne albo mają tylko jeden punkt wspólny będący wierzchołkiem ośmiokąta. Wyznaczyć ilość możliwych takich wyborów.

POWODZENIA!