ODPOWIEDZI DO ZADAŃ TESTOWYCH

1. Niech $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :\ 3^x + 4^x = 5^y\}$ będzie zbiorem rozwiązań równania $3^x + 4^x = 5^y$ w liczbach rzeczywistych. Wówczas

TAK zbiór $\mathcal{A}$ i zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mają wspólne elementy,

TAK zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym,

TAK dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno takie $y \in \mathbb{R}$, że $(x, y) \in \mathcal{A}$.

2. Oznaczamy przez $|X|$ liczbę elementów **skończonego** zbioru X. Wówczas, dla dowolnych zbiorów skończonych A, B, C zachodzi równość:

NIE $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B \cap C|$,

NIE $|(A \setminus B) \setminus C| = |A| - |B| + |C|$,

TAK $|(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)| = |A \setminus B| + |B \setminus C| + |C \setminus A|$.

3. Niech $p, q \geq 10$ będą **różnymi** liczbami pierwszymi. Wówczas

NIE $\sqrt{p+q}$ jest liczbą niewymierną,

TAK $\sqrt{pq}$ jest liczbą niewymierną,

TAK $p\sqrt{q} + q\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

4. Dany jest zbiór $\mathcal{A} = \{2^k 3^l :\ k, l = 0, 1, 2, \ldots\}$. Wówczas

TAK zbiór $\mathcal{A}$ zawiera nieskończenie wiele rozłącznych podzbiorów czteroelementowych postaci $\{a, a + r, a + 2r, a + 3r\}$,

NIE istnieje 2015 ciągów geometrycznych, których wyrazy wyczerpują zbiór $\mathcal{A}$,

TAK zbiór $\mathcal{A} \cap \{1, 2, \ldots, 2015\}$ ma co najmniej 31 elementów.

5. Niech $ABCD$ będzie czworokątem (niekoniecznie wypukłym). Niech E, F, G, H będą środkami jego kolejnych boków. Wówczas

NIE jeżeli $EFGH$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ jest równoległobokiem,

NIE jeżeli $EFGH$ jest rombem, to $ABCD$ jest prostokątem,

NIE jeżeli $EG \perp FH$, to $ABCD$ jest deltoidem.

6. Dla liczb $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ (całkowitych dodatnich) oznaczmy $A = \frac{m}{n}$ i $B = \frac{m+2n}{m+n}$. Wtedy

NIE istnieją takie $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, że $A = B$,

NIE istnieją takie $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, że $2A = B$,

TAK dla wszystkich $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zachodzi równość $|A - \sqrt{2}| + |B - \sqrt{2}| = |A - B|$.

7. Dane są dwa ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) o różnicach $r_a \neq 0$ i $r_b \neq 0$, przy czym dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzą równości $a_k = b_k$ i $a_{k+2014} = b_{k+2016}$. Wtedy

TAK iloraz r_a/r_b jest liczbą wymierną,

TAK istnieje taki indeks n, że $a_n b_n \geq 2015$,

TAK istnieje taki indeks n, że $|a_n - b_n| \geq 2015$.

8. Wielomian $F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5$ ma współczynniki rzeczywiste i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ spełnia nierówności $F(x) \geq 2x + 3$ i $F(x) \geq -2x + 3$. Wówczas

NIE $a_5 > 0$,

NIE $a_0 = 3$,

TAK $a_0 + a_2 + a_4 \geq 5$.

9. Istnieje taka liczba pierwsza p, że

TAK $p + 8$ jest sześcianem liczby naturalnej,

TAK $p^2 - 8$ jest sześcianem liczby naturalnej,

NIE $p^3 + 1$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

10. Trójkąt $\triangle ABC$ ma boki o długościach $a = 91$, $b = 60$, $c = 109$. Wówczas

NIE trójkąt $\triangle ABC$ jest ostrokątny,

TAK promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 21,

NIE promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest większy niż 55.

11. Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną przez $f(x) = |\lfloor x \rfloor| - \lfloor |x| \rfloor$ (*wartość bezwzględna podłogi minus podłoga wartości bezwzględnej*). Wówczas

NIE funkcja f jest funkcją okresową,

TAK funkcja g dana wzorem $g(x) = f(x) - f(-x)$ jest funkcją nieparzystą,

TAK funkcja h dana wzorem $h(x) = f(x) + f(-x)$ jest funkcją okresową.

12. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, przy czym $a_1 = -14$, $a_2 = 5$. Wówczas

TAK pewne dwa **kolejne** wyrazy ciągu (a_n) są kwadratami liczb całkowitych,

NIE pewne trzy **kolejne** wyrazy ciągu (a_n) są kwadratami liczb całkowitych,

TAK istnieje nieskończenie wiele takich $n \in \mathbb{N}$, że a_n jest kwadratem.

13. W przestrzeni 3-wymiarowej dany jest trójkąt $\mathcal{T} = \triangle ABC$. Jego rzutami na płaszczyzny Oxy, Oyz i Ozx prostokątnego układu współrzędnych $Oxyz$ są trójkąty $\mathcal{T}_z$, $\mathcal{T}_x$ i $\mathcal{T}_y$. Pola trójkątów $\mathcal{T}_x$, $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$ są **równe**. Wówczas

NIE taki trójkąt nie istnieje,

NIE trójkąt $\mathcal{T}$ jest równoboczny,

TAK, jeżeli punkt $P = (a, b, c)$ jest rzutem prostokątnym punktu $(0, 0, 0)$ na płaszczyznę trójkąta $\mathcal{T}$, to $|a| = |b| = |c|$.

14. W podstawie $\triangle ABC$ czworościanu $ABCS$ dany jest taki punkt P, że objętości czworościanów $ABPS$, $BCPS$ i $CAPS$ są równe. Wówczas

NIE punkt P jest spodkiem wysokości czworościanu opuszczonej z wierzchołka S,

NIE odległości punktu P od ścian ABS, BCS i CAS są równe,

TAK zachodzi równość $2|AC|^2 + 2|BC|^2 - |AB|^2 = 9|CP|^2$.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|,$$

gdzie $a < b < c < d$ są zadanymi liczbami rzeczywistymi. Niech m będzie minimalną wartością funkcji f. Wówczas

NIE $f\left(\frac{a+d}{2}\right) = m,$

TAK funkcja f przyjmuje wartość m dla nieskończenie wielu argumentów x,

NIE istnieją takie stałe $A > 0,\ B,\ C,$ że $Ax^2 + Bx + C < f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

16. Wiadomo, że liczba 2011 jest liczbą pierwszą. Wobec tego istnieje dokładnie jedna taka para liczb naturalnych $x,\ y,$ że

TAK $x^2 - y^2 = 2011,$

NIE $x^2 + y^2 = 2011$ i $x \geq y,$

NIE $x^2 + 5y^2 = 2011.$

17. Pewien n-kąt $(n \geq 3)$ ma boki o długościach $a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{n-1},\ a^n,$ gdzie $a > 1.$ Wówczas

NIE a może być równe $2,$

NIE jeżeli $n = 3,$ to $2a < 3,$

NIE jeżeli $n = 4,$ to ten n-kąt jest wypukły.

18. Niech $L(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}.$ Wówczas

TAK $L(n+m) = L(n)L(m)$ dla dowolnych liczb naturalnych $n,\ m,$

TAK $L(nm) = L(n)^m$ dla dowolnych liczb naturalnych $n,\ m,$

NIE liczba $L(11) + 1$ jest liczbą pierwszą.

19. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

Wówczas

NIE funkcja f jest nieparzysta,

TAK dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f(x)| \leq 1,$

TAK funkcja f jest okresowa.

20. Promień r okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$ wynosi $1,$ a pole S jest liczbą wymierną. Niech $a,\ b,\ c$ będą długościami boków tego trójkąta. Wówczas

NIE możliwe jest, że dokładnie jedna z liczb $a,\ b,\ c$ jest niewymierna,

TAK możliwe jest, że liczby $a,\ b,\ c$ są liczbami naturalnymi,

TAK możliwe jest, że $S = 2015.$

R O Z W I Ą Z A N I A   Z A D A Ń   T E K S T O W Y C H

ZADANIE 1. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \tag{1}$$

w liczbach całkowitych $x_i \geq -3$.

R o z w i ą z a n i e. Niech $y_i = x_i + 3$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Każde rozwiązanie (x_1, x_2, x_3, x_4) równania (1) w liczbach całkowitych $x_i \geq -3$ wyznacza więc rozwiązanie równania

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 22 \tag{2}$$

w liczbach całkowitych **nieujemnych**. I odwrotnie, każde rozwiązanie równania (2) w liczbach nieujemnych wyznacza (jednoznacznie) rozwiązanie równania (1) w liczbach $x_i \geq -3$. Wobec tego policzymy liczbę rozwiązań równania (2).

Aby to zrobić ustawmy w szeregu trzy czarne kwadraciki: ■ ■ ■, a następnie z lewej strony ustawmy y_1 białych kwadracików, między pierwszym czarnym kwadracikiem a drugim wstawmy szereg y_2 białych kwadracików, między drugim czarnym kwadracikiem a trzecim wstawmy szereg y_3 białych kwadracików, i w końcu, z prawej strony trzeciego czarnego kwadracika ustawmy szereg złożony z y_4 białych kwadracików. Na przykład rozwiązanie $(1, 10, 3, 8)$ równania (2) daje w ten sposób konfigurację:

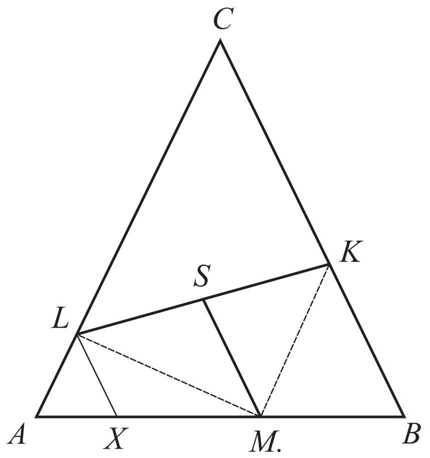
□ ■ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ ■ □ □ □ ■ □ □ □ □ □ □ □ □

Jasne, że w ten sposób powstaje "kod" dowolnego rozwiązania (y_1, y_2, y_3, y_4) równania (2) w liczbach nieujemnych. I odwrotnie, każdy dwudziestopięciowyrazowy ciąg kwadracików, z których trzy są czarne a dwadzieścia dwa są białe, pozwala jednoznacznie odczytać rozwiązanie równania (2). Wobec tego wystarczy wyznaczyć liczbę takich ciągów. Lub równoważnie, liczbę sposobów "zaczernienia" trzech z danych dwudziestu pięciu kwadracików. Jasne, że ta liczba jest liczbą trzyelementowych podzbiorów zbioru dwudziestopięcioelementowego. Czyli

$$\binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2300.$$

I to jest **odpowiedź**.

U w a g a. W taki sam sposób można udowodnić, że zbiór $\mathcal{R}(k, n)$ rozwiązań równania $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n$ w liczbach nieujemnych ma $\binom{n+k-1}{k-1}$ elementów, zob. $\mathbb{KOM}$. ♦



ZADANIE 2. Na bokach $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trójkąta równoramiennego $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$) obrano takie punkty K i L, że $|AL| + |BK| = |KL|$. Przez środek S odcinka $\overline{KL}$ prowadzimy prostą równoległą do prostej BC. Prosta ta przecina podstawę $\overline{AB}$ trójkąta $\triangle ABC$ w punkcie M. Wyznaczyć miarę kąta $\sphericalangle KML$.

Rozwiązanie. Przez punkt L poprowadźmy prostą równoległą do prostej BC i oznaczmy przez X jej punkt przecięcia z podstawą AB trójkąta $\triangle ABC$. Zauważamy trapez $XBKL$. Odcinek $\overline{SM}$ jest równoległy do podstaw $\overline{LX}$ i $\overline{KB}$ tego trapezu i przechodzi przez środek jednego z boków nierównoległych tego trapezu (w naszym przypadku $\overline{KL}$). Wobec tego odcinek $\overline{SM}$ jest odcinkiem środkowym trapezu $XBKL$ i, jako taki, ma długość równą średniej arytmetycznej długości podstaw:

$$|SM| = \frac{|XL| + |BK|}{2}, \tag{1}$$

zobacz $\mathbb{GEO}$. Z drugiej strony, trójkąt $\triangle AXL$ jest równoramienny, co wynika z *pons asinorum* i równości $m(\sphericalangle LXA) = m(\sphericalangle CBA) = m(\sphericalangle CAB)$. Wobec tego $|XL| = |AL|$. Ta równość, równość (1) i założenie $|AL| + |BK| = |KL|$ dają równości

$$|SM| = \frac{|AL| + |BK|}{2} = \frac{|KL|}{2} = |SL| = |SK|.$$

Z tych równości wynika, że okrąg o środku S i promieniu równym $|SM|$ przechodzi przez punkty K, L, M. Kąt $\sphericalangle KML$ jest kątem wpisanym w ten okrąg opartym na średnicy $\overline{LK}$. Stąd dostajemy **odpowiedź**: *miara kąta* $\sphericalangle KML$ *jest równa* 90°. ♦