LVI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

21. 03. 2015

1. TEST

W każdym z poniższych 20 zadań testowych podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdej tezy i wpisać słowo **TAK** lub **NIE** w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, -1 punktów za odpowiedź niepoprawną, 0 punktów za brak odpowiedzi, i 1 punkt **dodatkowy** za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Niech $\mathcal{A} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :\; 3^x + 4^x = 5^y\}$ będzie zbiorem rozwiązań równania $3^x+4^x=5^y$ w liczbach rzeczywistych. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}$ i zbiór $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mają wspólne elementy,

.... zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym,

.... dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno takie $y \in \mathbb{R}$, że $(x,\, y) \in \mathcal{A}$.

2. Oznaczamy przez $|X|$ liczbę elementów **skończonego** zbioru X. Wówczas, dla dowolnych zbiorów skończonych $A,\, B,\, C$ zachodzi równość:

.... $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B\cap C|$,

.... $|(A \smallsetminus B) \smallsetminus C| = |A| - |B| + |C|$,

.... $|(A\smallsetminus B)\cup(B\smallsetminus C)\cup(C\smallsetminus A)| = |A\smallsetminus B| + |B\smallsetminus C| + |C\smallsetminus A|$.

3. Niech $p,\, q \geq 10$ będą **różnymi** liczbami pierwszymi. Wówczas

.... $\sqrt{p+q}$ jest liczbą niewymierną,

.... $\sqrt{pq}$ jest liczbą niewymierną,

.... $p\sqrt{q} + q\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

4. Dany jest zbiór $\mathcal{A} = \{2^k 3^l :\; k,\, l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}$. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}$ zawiera nieskończenie wiele rozłącznych podzbiorów czteroelementowych postaci $\{a,\, a+r,\, a+2r,\, a+3r\}$,

.... istnieje 2015 ciągów geometrycznych, których wyrazy wyczerpują zbiór $\mathcal{A}$,

.... zbiór $\mathcal{A}\cap\{1,\, 2,\, \ldots,2015\}$ ma co najmniej 31 elementów.

5. Niech $ABCD$ będzie czworokątem (niekoniecznie wypukłym). Niech $E,\, F,\, G,\, H$ będą środkami jego kolejnych boków. Wówczas

.... jeżeli $EFGH$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ jest równoległobokiem,

.... jeżeli $EFGH$ jest rombem, to $ABCD$ jest prostokątem,

.... jeżeli $EG \perp FH$, to $ABCD$ jest deltoidem.

6. Dla liczb $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ (całkowitych dodatnich) oznaczmy $A = \frac{m}{n}$ i $B = \frac{m+2n}{m+n}$. Wtedy

.... istnieją takie $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, że $A = B$,

.... istnieją takie $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, że $2A = B$,

.... dla wszystkich $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zachodzi równość $|A - \sqrt{2}| + |B - \sqrt{2}| = |A - B|$.

7. Dane są dwa ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) o różnicach $r_a \neq 0$ i $r_b \neq 0$, przy czym dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzą równości $a_k = b_k$ i $a_{k+2014} = b_{k+2016}$. Wtedy

.... iloraz r_a/r_b jest liczbą wymierną,

.... istnieje taki indeks n, że $a_n b_n \geq 2015$,

.... istnieje taki indeks n, że $|a_n - b_n| \geq 2015$.

8. Wielomian $F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5$ ma współczynniki rzeczywiste i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ spełnia nierówności $F(x) \geq 2x + 3$ i $F(x) \geq -2x + 3$. Wówczas

.... $a_5 > 0$,

.... $a_0 = 3$,

.... $a_0 + a_2 + a_4 \geq 5$.

9. Istnieje taka liczba pierwsza p, że

.... $p + 8$ jest sześcianem liczby naturalnej,

.... $p^2 - 8$ jest sześcianem liczby naturalnej,

.... $p^3 + 1$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

10. Trójkąt $\triangle ABC$ ma boki o długościach $a = 91$, $b = 60$, $c = 109$. Wówczas

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest ostrokątny,

.... promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 21,

.... promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest większy niż 55.

11. Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną przez $f(x) = |\lfloor x \rfloor| - \lfloor |x| \rfloor$ (*wartość bezwzględna podłogi minus podłoga wartości bezwzględnej*). Wówczas

.... funkcja f jest funkcją okresową,

.... funkcja g dana wzorem $g(x) = f(x) - f(-x)$ jest funkcją nieparzystą,

.... funkcja h dana wzorem $h(x) = f(x) + f(-x)$ jest funkcją okresową.

12. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, przy czym $a_1 = -14$, $a_2 = 5$. Wówczas

.... pewne dwa **kolejne** wyrazy ciągu (a_n) są kwadratami liczb całkowitych,

.... pewne trzy **kolejne** wyrazy ciągu (a_n) są kwadratami liczb całkowitych,

.... istnieje nieskończenie wiele takich $n \in \mathbb{N}$, że a_n jest kwadratem.

13. W przestrzeni 3-wymiarowej dany jest trójkąt $\mathcal{T}$. Jego rzutami na płaszczyzny Oxy, Oyz i Ozx prostokątnego układu współrzędnych $Oxyz$ są trójkąty $\mathcal{T}_z$, $\mathcal{T}_x$ i $\mathcal{T}_y$. Pola trójkątów $\mathcal{T}_x$, $\mathcal{T}_y$, $\mathcal{T}_z$ są **równe**. Wówczas

.... taki trójkąt nie istnieje,

.... trójkąt $\mathcal{T}$ jest równoboczny,

.... jeżeli punkt $P = (a, b, c)$ jest rzutem prostokątnym punktu $(0, 0, 0)$ na płaszczyznę trójkąta $\mathcal{T}$, to $|a| = |b| = |c|$.

14. W podstawie $\triangle ABC$ czworościanu $ABCS$ dany jest taki punkt P, że objętości czworościanów $ABPS$, $BCPS$ i $CAPS$ są równe. Wówczas

.... punkt P jest spodkiem wysokości czworościanu opuszczonej z wierzchołka S,

.... odległości punktu P od ścian ABS, BCS i CAS są równe,

.... zachodzi równość $2|AC|^2 + 2|BC|^2 - |AB|^2 = 9|CP|^2$.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|,$$

gdzie $a < b < c < d$ są zadanymi liczbami rzeczywistymi. Niech m będzie minimalną wartością funkcji f. Wówczas

.... $f\left(\frac{a+d}{2}\right) = m$,

.... funkcja f przyjmuje wartość m dla nieskończenie wielu argumentów x,

.... istnieją takie stałe $A > 0$, B, C, że $Ax^2 + Bx + C < f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

16. Wiadomo, że liczba 2011 jest liczbą pierwszą. Wobec tego istnieje dokładnie jedna taka para liczb naturalnych x, y, że

.... $x^2 - y^2 = 2011$,

.... $x^2 + y^2 = 2011$ i $x \geq y$,

.... $x^2 + 5y^2 = 2011$.

17. Pewien n-kąt $(n \geq 3)$ ma boki o długościach $a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n$, gdzie $a > 1$. Wówczas

.... a może być równe 2,

.... jeżeli $n = 3$, to $2a < 3$,

.... jeżeli $n = 4$, to ten n-kąt jest wypukły.

18. Niech $L(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

.... $L(n + m) = L(n)L(m)$ dla dowolnych liczb naturalnych n, m,

.... $L(nm) = L(n)^m$ dla dowolnych liczb naturalnych n, m,

.... liczba $L(11) + 1$ jest liczbą pierwszą.

19. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

Wówczas

.... funkcja f jest nieparzysta,

.... dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f(x)| \leq 1$,

.... funkcja f jest okresowa.

20. Promień r okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$ wynosi 1, a pole S jest liczbą wymierną. Niech a, b, c będą długościami boków tego trójkąta. Wówczas

.... możliwe jest, że dokładnie jedna z liczb a, b, c jest niewymierna,

.... możliwe jest, że liczby a, b, c są liczbami naturalnymi,

.... możliwe jest, że $S = 2015$.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

2. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.

Punktacja: Za każde zadanie tekstowe można uzyskać ilość punktów od 0 do 10.

ZADANIE 1. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

w liczbach całkowitych $x_i \geq -3$.

ZADANIE 2. Na bokach $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trójkąta równoramiennego $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$) obrano odpowiednio takie punkty K i L, że $|AL| + |BK| = |KL|$. Przez środek S odcinka $\overline{KL}$ prowadzimy prostą równoległą do prostej BC. Prosta ta przecina podstawę $\overline{AB}$ trójkąta $\triangle ABC$ w punkcie M. Wyznaczyć miarę kąta $\sphericalangle KML$.

POWODZENIA!