

imię i nazwisko klasa

szkoła miejscowość

LVII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

19. 03. 2016

1. TEST

W każdym z poniższych 20 zadań testowych podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdej tezy i wpisać słowo **TAK** lub **NIE** w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, -1 punktów za odpowiedź niepoprawną, 0 punktów za brak odpowiedzi, i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Niech \mathcal{A} będzie zbiorem wszystkich (rzeczywistych) rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$. Wówczas

- TAK** zbiór \mathcal{A} jest zbiorem nieskończonym,
NIE zbiór $\mathcal{A} \cap (0; \pi)$ jest zbiorem trzelementowym,
NIE istnieją takie dwa różne elementy $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, że $|\alpha - \beta| \leq \pi$.

2. Liczby całkowite a, b spełniają zależność $a - b = 2^{10}$. Wówczas liczba $a^2 - b^2$

- TAK** jest podzielna przez 2^{11} ,
TAK może być podzielna przez 2^{20} ,
NIE nigdy nie jest podzielna przez 2^{21} .

3. Przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą (*podłogę*) liczby rzeczywistej x . Rozważmy równanie z niewiadomą x i parametrem p : $px = [x] - 1$. Wówczas

- TAK** jeżeli $p = 1$, to równanie nie ma rozwiązań,
NIE jeżeli $p \neq 1$, to równanie ma rozwiązania,
NIE istnieje taki parametr $p \neq 0$, że równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

4. Podzbiór płaszczyzny składający się z tych punktów o współrzędnych (x, y) , dla których spełnione są (jednocześnie) nierówności $y - 1 < x^3 < y$,

- TAK** ma środek symetrii,
NIE jest zbiorem pustym,
NIE ma oś symetrii.

5. (a_n) i (b_n) są ciągami nieskończonymi o wyrazach dodatnich. Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$2c_n = a_n + b_n + |a_n - b_n|.$$

Wówczas

- NIE**.. jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) są monotoniczne, to ciąg (c_n) jest monotoniczny,
NIE.. jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) są arytmetyczne, to ciąg (c_n) jest arytmetyczny,
NIE.. jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) są geometryczne, to ciąg (c_n) jest geometryczny.
6. Liczba 112233445566
NIE.. jest kwadratem liczby naturalnej,
NIE.. jest sześcianem liczby naturalnej,
TAK.. jest pierwiastkiem sześciennym z liczby naturalnej.
7. W czworoboku $ABCD$ punkty K , L , M i N są środkami krawędzi \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{BD} i \overline{DA} odpowiednio. Jeżeli krawędzie \overline{AB} i \overline{CD} są równej długości, to
TAK.. proste KM i LN są prostopadłe,
TAK.. punkty K , L , M , N leżą na jednej płaszczyźnie,
TAK.. punkty K , L , M , N są wierzchołkami równoległoboku.
8. Liczby rzeczywiste $a < b < c < d$ są takie, że wszystkie sumy $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$ i $c + d$ są liczbami całkowitymi. Wówczas
NIE.. wszystkie liczby a , b , c , d są liczbami całkowitymi,
TAK.. wszystkie liczby a , b , c , d są liczbami wymiernymi,
NIE.. liczba $4^a + 4^b + 4^c + 4^d$ jest liczbą całkowitą.
9. Liczba niewymierna α jest pierwiastkiem trójmianu $f(X) = aX^2 + bX + c$ o współczynnikach całkowitych. Drugi pierwiastek trójmianu $f(X)$ oznaczamy β . Wówczas
NIE.. co najmniej dwie liczby ze zbioru $\{\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$ są liczbami wymiernymi,
NIE.. β może być liczbą wymierną,
TAK.. $\alpha^{2016} + \beta^{2016}$ jest liczbą wymierną.
10. Niech $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$. Wówczas
NIE.. istnieje ciąg arytmetyczny, którego pewne wyrazy są równe a , b , c ,
NIE.. istnieje ciąg geometryczny, którego pewne wyrazy są równe a , b , c ,
NIE.. największą liczbą p , dla której istnieje trójkąt o bokach a^p , b^p , c^p jest $p = 1$, (9).
11. Dwa okręgi o różnych promieniach są styczne zewnętrznie w punkcie P . Prosta k jest styczna do obu tych okręgów w punktach $A \neq B$, a inna prosta l jest styczna do obu tych okręgów w punktach $C \neq D$. Wówczas
TAK.. punkty A , B , C , D leżą na jednym okręgu,
NIE.. punkty A , B , C , D są wierzchołkami deltoidu,
NIE.. zachodzi nierówność $m(\sphericalangle APB) + m(\sphericalangle CPD) > 180^\circ$.

12. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu r i środku leżącym na boku \overline{AB} . Wówczas

~~TAK~~. $|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 > 12r^2$,

~~TAK~~. jeżeli $\{P\} = l_{AC} \cap l_{BD}$ i $\{Q\} = l_{AD} \cap l_{BC}$, to $PQ \perp AB$,

~~TAK~~. $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$.

13. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem: $f(x) = ax + \sin bx$, gdzie a, b są stałymi. Wówczas

~~TAK~~. istnieją takie a, b , że funkcja f jest ograniczona,

~~TAK~~. funkcja f jest funkcją okresową wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$,

~~NIE~~. funkcja f jest funkcją różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy $|a| > 1$.

14. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Wówczas

~~TAK~~. $|ac + bd| \leq 1$,

~~NIE~~. $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$,

~~TAK~~. $|ab - cd| \leq 1$.

15. Istnieje taka liczba wymierna $a > 0$, że

~~TAK~~. liczba \sqrt{a} jest liczbą wymierną,

~~TAK~~. obie liczby $\sqrt{a}, \sqrt{a+1}$ są liczbami wymiernymi,

~~TAK~~. obie liczby $\sqrt{a}, \sqrt{a+2}$ są liczbami wymiernymi.

16. Dla liczby rzeczywistej $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) i dowolnej liczby naturalnej n

~~TAK~~. zachodzi nierówność $|\sin nx| \leq n|\sin x|$,

~~NIE~~. zachodzi nierówność $|\cos nx| \leq n|\cos x|$,

~~NIE~~. zachodzi nierówność $|\operatorname{tg} nx| \leq n|\operatorname{tg} x|$ (dla $nx \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

17. Liczby $a > 1$ i $b > 1$ są takie, że $\log(a+b) = \log a + \log b$. Wówczas

~~TAK~~. $\max\{a, b\} \geq 2$,

~~NIE~~. zachodzi równość $\log(a-1) + \log(b-1) = 1$,

~~TAK~~. $a^2 + b^2 + 1 = (ab-1)^2$.

18. Podzbiory $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ płaszczyzny zadane są w ustalonym układzie współrzędnych prostokątnych następująco:

$$\mathcal{F}_1 = \{(x, y) : x^2 \leq y \text{ i } y^2 \leq x\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ i } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Wówczas

~~NIE~~. $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$,

~~NIE~~. zbiór \mathcal{F}_1 ma dwie osie symetrii,

~~TAK~~. zbiór \mathcal{F}_2 ma dwie osie symetrii.

19. Niech $\mathcal{A} = \left\{ \frac{n^3+2016}{n+13} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{-13\} \right\}$. Wówczas

~~NIE~~... dla każdego $u \in \mathcal{A}$ zachodzi nierówność $u > 200$,

~~TAK~~... zbiór $\mathcal{A} \cap \mathbb{Z}$ jest zbiorem skończonym,

~~NIE~~... dla każdego $u \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Z}$ liczba $u + 1$ jest kwadratem (liczby całkowitej).

20. Funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy *chyżą*, gdy dla dowolnych różnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|f(x_1) - f(x_2)| > |x_1 - x_2|.$$

Wówczas

~~NIE~~... funkcja $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją chyżą,

~~NIE~~... funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ jest funkcją chyżą,

~~TAK~~... istnieje wielomian stopnia ≥ 2 będący funkcją chyżą.

∞ ∞ ∞ ∞ ∞

2. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.

Punktacja: Za każde zadanie tekstowe można uzyskać ilość punktów od 0 do 10.

ZADANIE 1. Dla każdej permutacji

$$\sigma = (a_1 a_2, \dots, a_{11}) \tag{1}$$

liczb $1, 2, \dots, 11$ przez $M(\sigma)$ oznaczmy maksymalną wartość sumy

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1},$$

gdzie $k \in \{2, 3, \dots, 10\}$, trzech kolejnych wyrazów ciągu (1). Wyznaczyć minimum wszystkich $11!$ liczb $M(\sigma)$.

ZADANIE 2. Dany jest trójkąt nieprostokątny $\triangle ABC$. Wyznaczyć (za pomocą $\alpha = m(\sphericalangle A)$, $\beta = m(\sphericalangle B)$, $\gamma = m(\sphericalangle C)$) miary kątów trójkąta $\triangle A'B'C_1$, gdzie A', B' są spodkami wysokości, a C_1 jest środkiem boku \overline{AB} .

∞ ∞ ∞ ∞ ∞

POWODZENIA!

Uwaga. Symbolem \mathbb{Z} oznaczamy, jak zwykle, zbiór liczb całkowitych, a symbolem \mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych.

ROZWIĄZANIA

ZADANIE 1. Dla każdej permutacji

$$\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_{11}) \quad (1)$$

liczb $1, 2, \dots, 11$ przez $M(\sigma)$ oznaczmy maksymalną wartość sumy

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1}, \quad (2)$$

gdzie $k \in \{2, 3, \dots, 10\}$, trzech kolejnych wyrazów ciągu (1). Wyznaczyć minimum wszystkich $11!$ liczb $M(\sigma)$.

Rozwiązanie. Udowodnimy najpierw że dla dowolnej permutacji (1) zachodzi nierówność $M(\sigma) \geq 18$. Załóżmy w tym celu nie wprost, że wszystkie sumy postaci (2) są ≤ 17 . Wobec tego

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 + a_5 &\leq 17, & a_6 + a_7 + a_8 &\leq 17, & a_9 + a_{10} + a_{11} &\leq 17, \\ a_1 + a_2 + a_3 &\leq 17, & a_6 + a_7 + a_8 &\leq 17, & a_9 + a_{10} + a_{11} &\leq 17, \\ a_1 + a_2 + a_3 &\leq 17, & a_4 + a_5 + a_6 &\leq 17, & a_9 + a_{10} + a_{11} &\leq 17, \\ a_1 + a_2 + a_3 &\leq 17, & a_4 + a_5 + a_6 &\leq 17, & a_7 + a_8 + a_9 &\leq 17. \end{aligned}$$

Stąd, ponieważ $\sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{l=1}^{11} l = 66$, z kolejnych wierszy wnioskujemy:

$$a_1 + a_2 \geq 66 - 3 \cdot 17 = 15, \quad a_4 + a_5 \geq 15, \quad a_7 + a_8 \geq 15, \quad a_{10} + a_{11} \geq 15.$$

Zatem

$$(a_1 + a_2) + (a_4 + a_5) + (a_7 + a_8) + (a_{10} + a_{11}) \geq 4 \cdot 15 = 60.$$

I wreszcie $a_3 + a_6 + a_9 \leq 66 - 60 = 6$. To, oczywiście, może zajść jedynie w przypadku, gdy

$$\{a_3, a_6, a_9\} = \{1, 2, 3\}.$$

Stąd wnioskujemy, że na miejscu trzecim lub szóstym lub dziewiątym w permutacji (1) stoi liczba 3. Ponieważ na dwóch sąsiadujących miejscach (zarówno z lewej jak i z prawej strony) stoją dwie liczby o sumie ≥ 15 , więc dostajemy trzy kolejne wyrazy ciągu (1) o sumie ≥ 18 . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $M(\sigma) \geq 18$ dla każdej permutacji (1).

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy więc wskazać jedną permutację postaci (1), dla której zachodzi równość $M(\sigma) = 18$. Taką permutacją jest na przykład:

$$(11, 5, 1, 8, 7, 3, 6, 9, 2, 4, 10),$$

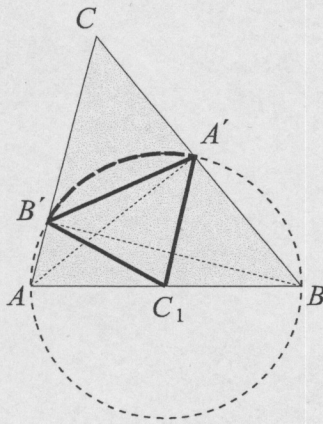
dla której kolejne sumy (2) są równe: 17, 14, 16, 18, 16, 18, 17, 15, 16. \blacklozenge

ZADANIE 2. Dany jest trójkąt nieprostokątny $\triangle ABC$. Wyznaczyć (za pomocą $\alpha = m(\sphericalangle A)$, $\beta = m(\sphericalangle B)$, $\gamma = m(\sphericalangle C)$) miary kątów trójkąta $\triangle A'B'C_1$, gdzie, jak zwykle, A' , B' są spodkami wysokości, a C_1 jest środkiem boku \overline{AB} .

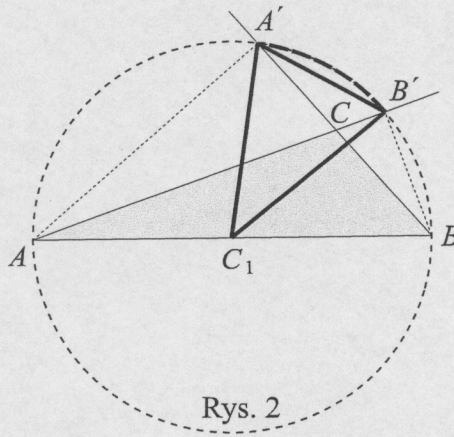
Rozwiązanie. W rozwiązaniu podstawową rolę gra okrąg \mathcal{K} przechodzący przez punkty A, B, A', B' . Jest to okrąg o średnicy \overline{AB} , czyli okrąg $\mathcal{K}(C_1, \frac{c}{2})$. Odcinki $\overline{C_1A'}, \overline{C_1B'}$ są promieniami tego okręgu. Trójkąt $\triangle A'B'C_1$ jest więc trójkątem równoramiennym, skąd (zobacz *Pons Asinorum*)

$$m(\sphericalangle A') = m(\sphericalangle B'). \quad (3)$$

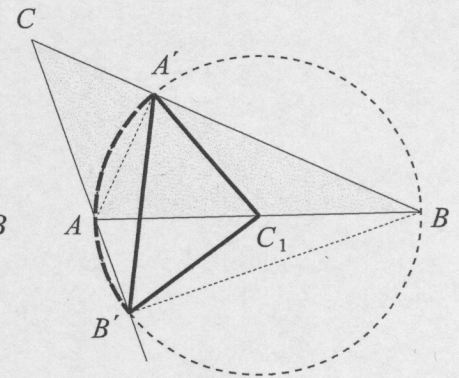
Ponadto kąt $\sphericalangle C_1$ jest kątem środkowym opartym na łuku $\widehat{A'B'}$ okręgu \mathcal{K} . Zatem jego miara jest dwukrotnie większa niż miara dowolnego opartego na tym samym łuku kąta wpisanego.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Korzystając z powyższego wyznaczamy kąty trójkąta $\triangle A'B'C_1$ w trzech przypadkach:

(1) ($\triangle ABC$ jest ostrokątny, rys.1)

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle C_1) &= 2m(\sphericalangle A'BB') = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma = \alpha + \beta - \gamma, \\ m(\sphericalangle A') &= m(\sphericalangle B') = \gamma. \end{aligned}$$

(2) (kąt $\sphericalangle C$ jest rozwarty, rys. 2)

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle C_1) &= 2m(\sphericalangle A'BB') = 2(180^\circ - 90^\circ - \alpha - \beta) = 2\gamma - 180^\circ = -\alpha - \beta + \gamma, \\ m(\sphericalangle A') &= m(\sphericalangle B') = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta. \end{aligned}$$

(3) (kąt $\sphericalangle A$ jest rozwarty, rys. 3)

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle C_1) &= 2m(\sphericalangle A'BB') = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma, \\ m(\sphericalangle A') &= m(\sphericalangle B') = \gamma. \end{aligned}$$

Przypadek, gdy to kąt $\sphericalangle B$ jest kątem rozwartym sprowadza się do (3) po zamianie A na B . W ten sposób zadanie jest rozwiązane w całej ogólności. \blacklozenge