imię i nazwisko .... klasa ....

szkoła .... miejscowość ....

LVII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

19. 03. 2016

1. TEST

W każdym z poniższych 20 zadań testowych podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdej tezy i wpisać słowo **TAK** lub **NIE** w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, -1 punktów za odpowiedź niepoprawną, 0 punktów za brak odpowiedzi, i 1 punkt d o d a t k o w y za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu testowym.

1. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem wszystkich (rzeczywistych) rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = x$. Wówczas

.... zbiór $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym,

.... zbiór $\mathcal{A} \cap (\,0;\,\pi\,)$ jest zbiorem trzyelementowym,

.... istnieją takie dwa r ó ż n e elementy $\alpha,\,\beta \in \mathcal{A}$, że $|\alpha - \beta| \le \pi$.

2. Liczby całkowite a, b spełniają zależność $a - b = 2^{10}$. Wówczas liczba $a^2 - b^2$

.... j e s t podzielna przez 2^{11},

.... m o ż e być podzielna przez 2^{20},

.... n i g d y nie jest podzielna przez 2^{21}.

3. Przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy część całkowitą (*podłogę*) liczby rzeczywistej x. Rozważmy równanie z niewiadomą x i parametrem p: $px = \lfloor x \rfloor - 1$. Wówczas

.... jeżeli $p = 1$, to równanie nie ma rozwiązań,

.... jeżeli $p \ne 1$, to równanie ma rozwiązania,

.... istnieje taki parametr $p \ne 0$, że równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

4. Podzbiór płaszczyzny składający się z tych punktów o współrzędnych $(x,\,y)$, dla których spełnione są (jednocześnie) nierówności $y - 1 < x^3 < y$,

.... ma środek symetrii,

.... jest zbiorem pustym,

.... ma oś symetrii.

5. (a_n) i (b_n) są ciągami nieskończonymi o wyrazach dodatnich. Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$2c_n = a_n + b_n + |a_n - b_n|.$$

Wówczas

.... jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są monotoniczne, to ciąg (c_n) jest monotoniczny,
.... jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są arytmetyczne, to ciąg (c_n) jest arytmetyczny,
.... jeżeli ciągi (a_n), (b_n) są geometryczne, to ciąg (c_n) jest geometryczny.

6. Liczba 112233445566

.... jest kwadratem liczby naturalnej,
.... jest sześcianem liczby naturalnej,
.... jest pierwiastkiem sześciennym z liczby naturalnej.

7. W czworościanie $ABCD$ punkty K, L, M i N są środkami krawędzi $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ i $\overline{DA}$ odpowiednio. Jeżeli krawędzie $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ są równej długości, to

.... proste KM i LN są prostopadłe,
.... punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie,
.... punkty K, L, M, N są wierzchołkami równoległoboku.

8. Liczby rzeczywiste $a < b < c < d$ są takie, że wszystkie sumy $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ i $c+d$ są liczbami całkowitymi. Wówczas

.... wszystkie liczby a, b, c, d są liczbami całkowitymi,
.... wszystkie liczby a, b, c, d są liczbami wymiernymi,
.... liczba $4^a + 4^b + 4^c + 4^d$ jest liczbą całkowitą.

9. Liczba n i e w y m i e r n a α jest pierwiastkiem trójmianu $f(X) = aX^2 + bX + c$ o współczynnikach całkowitych. Drugi pierwiastek trójmianu $f(X)$ oznaczamy β. Wówczas

.... co najmniej dwie liczby ze zbioru $\{\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$ są liczbami wymiernymi,
.... β może być liczbą wymierną,
.... $\alpha^{2016} + \beta^{2016}$ jest liczbą wymierną.

10. Niech $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$. Wówczas

.... istnieje ciąg arytmetyczny, którego pewne wyrazy są równe a, b, c,
.... istnieje ciąg geometryczny, którego pewne wyrazy są równe a, b, c,
.... największą liczbą p, dla której istnieje trójkąt o bokach a^p, b^p, c^p jest $p = 1,(9)$.

11. Dwa okręgi o różnych promieniach są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta k jest styczna do obu tych okręgów w punktach $A \neq B$, a inna prosta l jest styczna do obu tych okręgów w punktach $C \neq D$. Wówczas

.... punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu,
.... punkty A, B, C, D są wierzchołkami deltoidu,
.... zachodzi nierówność $m(\sphericalangle APB) + m(\sphericalangle CPD) > 180^\circ$.

12. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu r i środku leżącym na boku $\overline{AB}$. Wówczas

.... $|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 > 12r^2$,

.... jeżeli $\{P\} = l_{AC} \cap l_{BD}$ i $\{Q\} = l_{AD} \cap l_{BC}$, to $PQ \perp AB$,

.... $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$.

13. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem: $f(x) = ax + \sin bx$, gdzie a, b są stałymi. Wówczas

.... istnieją takie a, b, że funkcja f jest ograniczona,

.... funkcja f jest funkcją okresową wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$,

.... funkcja f jest funkcją różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy $|a| > 1$.

14. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Wówczas

.... $|ac + bd| \leq 1$,

.... $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$,

.... $|ab - cd| \leq 1$.

15. Istnieje taka liczba wymierna $a > 0$, że

.... liczba $\sqrt{a}$ jest liczbą wymierną,

.... obie liczby $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+1}$ są liczbami wymiernymi,

.... obie liczby $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+2}$ są liczbami wymiernymi.

16. Dla liczby rzeczywistej $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ i dowolnej liczby naturalnej n

.... zachodzi nierówność $|\sin nx| \leq n|\sin x|$,

.... zachodzi nierówność $|\cos nx| \leq n|\cos x|$,

.... zachodzi nierówność $|\operatorname{tg} nx| \leq n|\operatorname{tg} x|$ (dla $nx \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

17. Liczby $a > 1$ i $b > 1$ są takie, że $\log(a+b) = \log a + \log b$. Wówczas

.... $\max\{a, b\} \geq 2$,

.... zachodzi równość $\log(a-1) + \log(b-1) = 1$,

.... $a^2 + b^2 + 1 = (ab-1)^2$.

18. Podzbiory $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ płaszczyzny zadane są w ustalonym układzie współrzędnych prostokątnych następująco:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{(x, y) : x^2 \leq y \quad \text{i} \quad y^2 \leq x\right\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \left\{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Wówczas

.... $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$,

.... zbiór $\mathcal{F}_1$ m a dwie osie symetrii,

.... zbiór $\mathcal{F}_2$ m a dwie osie symetrii.

19. Niech $\mathcal{A} = \left\{ \frac{n^3+2016}{n+13} \ : \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-13\} \right\}$. Wówczas

.... dla każdego $u \in \mathcal{A}$ zachodzi nierówność $u > 200$,

.... zbiór $\mathcal{A} \cap \mathbb{Z}$ jest zbiorem skończonym,

.... dla każdego $u \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Z}$ liczba $u+1$ jest kwadratem (liczby całkowitej).

20. Funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy *chyżą*, gdy dla dowolnych r ó ż n y c h x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|f(x_1) - f(x_2)| > |x_1 - x_2|.$$

Wówczas

.... funkcja $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją chyżą,

.... funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ jest funkcją chyżą,

.... istnieje wielomian stopnia ≥ 2 będący funkcją chyżą.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

2. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.

Punktacja: Za każde zadanie tekstowe można uzyskać ilość punktów od 0 do 10.

ZADANIE 1. Dla każdej permutacji

$$\sigma = (\, a_1\, a_2, \ \ldots\ , a_{11}\,) \tag{1}$$

liczb 1, 2, ... , 11 przez $M(\sigma)$ oznaczmy m a k s y m a l n ą wartość sumy

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1},$$

gdzie $k \in \{2, 3, \ldots, 10\}$, trzech k o l e j n y c h wyrazów ciągu (1). Wyznaczyć minimum wszystkich 11! liczb $M(\sigma)$.

ZADANIE 2. Dany jest trójkąt n i e p r o s t o k ą t n y $\triangle ABC$. Wyznaczyć (za pomocą $\alpha = m(\sphericalangle A)$, $\beta = m(\sphericalangle B)$, $\gamma = m(\sphericalangle C)$) miary kątów trójkąta $\triangle A'B'C_1$, gdzie A', B' są spodkami wysokości, a C_1 jest środkiem boku $\overline{AB}$.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

P O W O D Z E N I A!

U w a g a. Symbolem $\mathbb{Z}$ oznaczamy, jak zwykle, zbiór liczb całkowitych, a symbolem $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych.