ZADANIE 1
W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, gdzie $m(\sphericalangle C) = 90°$, zachodzi równość $m(\sphericalangle BIO) = 90°$ (I jest środkiem okręgu wpisanego, a O jest środkiem okręgu opisanego). Wyznaczyć długości a, b przyprostokątnych, jeżeli wiadomo, że długość przeciwprostokątnej c jest równa 10.

Rozwiązanie W trójkącie prostokątnym punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej. (Bo przeciwprostokątna jest oczywiście średnicą okręgu opisanego.)

Niech X oznacza rzut punktu I na l_{AB}. Punkt X jest spodkiem wysokości w trójkącie prostokątnym $\triangle BIO$, więc leży wewnątrz odcinka $\overline{OB}$. Z zasadniczego twierdzenia planimetrii wynika, że $|AX| = (-a+b+c)/2$, $|BX| = (a-b+c)/2$. Zatem $|OX| = c/2 - (a-b+c)/2 = (b-a)/2$.

W trójkącie prostokątnym zachodzi równość $r = (a+b-c)/2$, gdzie r jest długością promienia okręgu wpisanego. Wobec tego mamy $|IX| = (a+b-c)/2$. Trójkąt $\triangle OBI$ jest prostokątny, zatem $\triangle OXI \sim \triangle IXB$, a z tego wynika że $|OX||XB| = |XI|^2$.

To prowadzi do równości

$$\frac{b-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2,$$

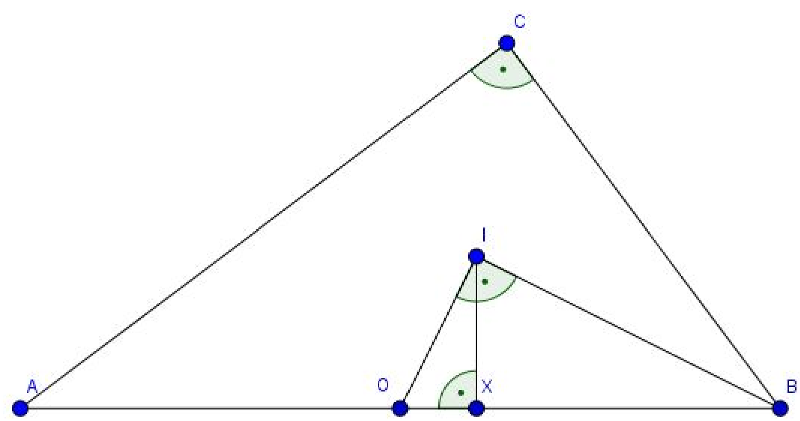
która po rozwinięciu, uporządkowaniu i skorzystaniu z faktu że $a^2 + b^2 = c^2$ prowadzi do

$$3bc + ac = 3c^2,$$

a więc $a + 3b = 30$, bo $c = 10$. Możemy w równości $a^2 + b^2 = 100$ podstawić $a = 3b - 30$. Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$10b^2 - 180b + 800 = 0.$$

Jego rozwiązaniami są $b = 8, b = 10$. Ale $b < 10$, więc $b = 8$ i wtedy $a = 6$. ■



ZADANIE 2

W turnieju szachowym uczestniczyło dwóch juniorów i n>8 seniorów. Każdy uczestnik grał z każdym dokładnie raz. Juniorzy zdobyli łącznie 8 punktów, a każdy senior zdobył tyle samo punktów. Wyznaczyć n, jeżeli za zwycięstwo w danej partii dostaje się 1 punkt, za remis 1/2 punktu, a za porażkę 0 punktów.

Rozwiązanie Wszystkich partii rozegrano $\binom{n+2}{2}$, więc tyle punktów zdobyli łącznie wszyscy zawodnicy. Juniorzy mieli razem 8 punktów, więc seniorzy uzyskali w sumie $R(n) = \frac{n^2+3n-14}{2}$ punktów. Ale każdy senior zdobył ich tyle samo, więc $n|R(n)$, a stąd wynika, że $n|14$. Z warunków zadania mamy, że $n > 8$, zatem $n = 14$. ■