imię i nazwisko .... klasa ....

szkoła .... miejscowość ....

LVIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

18. 03. 2017

1. TEST

W każdym z poniższych 20 zadań testowych podano założenia oraz trzy tezy. Dla każdej tezy należy rozstrzygnąć czy wynika ona z podanych założeń i wpisać słowo **TAK** lub **NIE** w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja: Poprawna odpowiedź: **1** punkt; Niepoprawna odpowiedź: $(-\mathbf{1})$ punktów; Brak odpowiedzi: **0** punktów; Trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu: **1** punkt d o d a t k o w y.

U w a g a. To nie jest test jednokrotnego wyboru: prawdziwość jednej z implikacji w danym zadaniu n i e pociąga fałszywości pozostałych dwóch i fałszywość dwóch implikacji w danym zadaniu n i e pociąga prawdziwości trzeciej!

1. Istnieją takie różne liczby naturalne $a, b \geq 2$, że

.... $\mathrm{NWW}(a, b) + \mathrm{NWD}(a, b)$ jest nieparzystą liczbą pierwszą,
.... $\mathrm{NWW}(a, b) - \mathrm{NWD}(a, b) = 1$,
.... $\mathrm{NWW}(a, b) - \mathrm{NWD}(a, b) = 2017$.

2. Istnieją takie liczby pierwsze $p \leq q \leq r$, że

.... liczba $p + q + r$ jest liczbą pierwszą,
.... liczby $p + q$, $q + r$, $r + p$ są liczbami pierwszymi,
.... liczba $2^{-7}(p + q + r)$ jest liczbą naturalną.

3. Liczby naturalne m, n są takie, że $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ jest liczbą naturalną oraz zachodzą nierówności $2017 \leq m < n$. Wówczas

.... liczba $\sqrt{mn}$ jest parzystą liczbą naturalną,
.... zachodzi nierówność $n - m \geq 90$,
.... obie liczby m, n są kwadratami liczb całkowitych.

4. Dane są liczby $a > 1$, $b > 1$ i $c > 1$. Wówczas

.... $(\log_a b) \cdot (\log_b c) \cdot (\log_c a) = \log_{abc} abc$,
.... $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$,
.... $a^b \cdot b^c \cdot c^a = 10^{a \lg b + b \lg c + c \lg a}$, gdzie $\lg x = \log_{10} x$.

5. Liczby rzeczywiste x, y są takie, że $2y\sin x = y^2+1$ oraz $|x| \le 2$. Wówczas

.... $\sin 2x = 0$,

.... $\cos 2y < 0$,

.... pole koła o promieniu 1 jest równe $2xy$.

6. Ciąg (c_n) jest takim ciągiem geometrycznym, że wyrazy $c_1, c_2, \ldots, c_{2017}$ są liczbami naturalnymi, a c_{2018} nie jest liczbą całkowitą. Wówczas

.... ciąg $(\log_{10} c_n)$ jest ciągiem malejącym,

.... wszystkie wyrazy ciągu (c_n) są liczbami wymiernymi,

.... $c_1 \ge 2^{2016}$.

7. Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 2017$ i różnicy $r \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez d_n sumę cyfr (dziesiętnych) liczby a_n. Wówczas

.... ciąg (d_n) jest ciągiem rosnącym,

.... ciąg (d_n) może być ciągiem arytmetycznym,

.... istnieje taka liczba $s \in \mathbb{N}$, że zbiór $\{n \in \mathbb{N} : d_n = s\}$ jest zbiorem nieskończonym.

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$. Wówczas

.... funkcja f jest funkcją okresową,

.... funkcja g dana wzorem $g(x) = f(x)^2$ jest funkcją parzystą,

.... równanie $f(x) = ax^2$ ma rozwiązania dla każdego parametru $a \in \mathbb{R}$.

9. Rozważmy funkcję $f : (\,0;\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Niech $g(x) = ax^2+bx+c$ oznacza trójmian kwadratowy. Wówczas

.... istnieją takie a, b, c, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$,

.... jeżeli dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $g(x) < f(x)$, to $a < 1/10$,

.... istnieją takie a, b, c, że równanie $f(x) = g(x)$ ma trzy rozwiązania dodatnie.

10. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \lfloor 2^x \rfloor - 2^{\lfloor x \rfloor}$, gdzie $\lfloor \alpha \rfloor$ oznacza *część całkowitą* liczby rzeczywistej α. Wówczas

.... funkcja f jest funkcją okresową,

.... funkcja f jest funkcją ciągłą,

.... $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą.

11. Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \lfloor x \rfloor\, x^2$. Wówczas

.... funkcja f jest funkcją monotoniczną niemalejąca,

.... funkcja f jest funkcją nieparzystą,

.... istnieją takie a, $b > 0$, że równanie $f(x) = ax + b$ ma trzy rozwiązania.

12. Dane są takie funkcje ciągłe[1] $f,\, g : [\,0;\, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, że zachodzi równość:

$$\min\{f(x) + g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} = \min\{f(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} + \min\{g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\}.$$

Wówczas

.... $\max\{f(x) - g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} = \max\{f(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} - \min\{g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\}$,

.... $\max\{f(x) + g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} \le \max\{f(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} + \max\{g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\}$,

.... $\min\{f(x) \cdot g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} = \min\{f(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\} \cdot \min\{g(x) : x \in [\,0;\, 1\,]\}$.

13. Dany jest układ nierówności

$$(\mathcal{U}) : \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \ge 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \ge 0, \end{cases}$$

gdzie $a_1^2 + b_1^2 > 0$ i $a_2^2 + b_2^2 > 0$. Wówczas

.... układ $(\mathcal{U})$ może nie mieć rozwiązań,

.... jeżeli układ $(\mathcal{U})$ ma (co najmniej jedno) rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele,

.... jeżeli układ $(\mathcal{U})$ ma rozwiązania (rzeczywiste), to ma też rozwiązania wymierne[2].

14. Trójkąt $\mathcal{T}$ ma wierzchołki w punktach $A = (1,\, 1)$, $B = (-3,\, 2)$, $C = (-1,\, 10)$. Wówczas

.... trójkąt $\mathcal{T}$ jest trójkątem ostrokątnym,

.... pole $S(\mathcal{T})$ trójkąta $\mathcal{T}$ jest równe 17,

.... promień r okręgu wpisanego w trójkąt $\mathcal{T}$ spełnia równość $(3 + \sqrt{5})r = 16$.

15. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest rozłączna ze zbiorem $\{(x,\, y) : x^2 + y^2 < 2y\}$. Wówczas

.... $b > 1$,

.... $a > 1$,

.... $b^2 \ge a^2 + 2b$.

16. Dany jest odcinek $\overline{AB}$. Dla dowolnego punktu C leżącego poza prostą AB przez C', C_1, F oznaczamy takie punkty prostej AB, że $\overline{CC'}$ jest wysokością, $\overline{CC_1}$ jest środkową i $\overline{CF}$ jest dwusieczną kąta $\sphericalangle C$ w trójkącie $\triangle ABC$. Wówczas

.... istnieje taki punkt C, że $C' \ne C_1$ i punkt C' jest środkiem odcinka $\overline{C_1F}$,

.... istnieje taki punkt C, że $|C'F| > \frac{1}{2}|AB|$,

.... jeżeli $C' \ne C_1$ i punkt F jest środkiem odcinka $\overline{C'C_1}$, to $m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ$.

[1] Ciągłość funkcji f i g implikuje istnienie występujących niżej maksimów i minimów!

[2] Para $(x,\, y)$ jest *rozwiązaniem wymiernym*, gdy jest rozwiązaniem (układu) i obie liczby x, y są liczbami wymiernymi

17. Trójkąty $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ są prostokątne, oba mają przeciwprostokątne długości 2017 i promienie okręgów wpisanych równe 1. Wówczas

.... trójkąty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ mają równe pola,

.... suma długości przyprostokątnych w każdym z tych trójkątów wynosi 2019,

.... trójkąty $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ są przystające.

18. Dany jest czworościan foremny $ABCD$, gdzie $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ (współrzędne w kartezjańskim prostokątnym układzie współrzędnych). Wówczas

.... wierzchołek D ma współrzędne $(0, 0, 0)$

.... objętość czworościanu $ABCD$ wynosi $\frac{1}{3}$,

.... promień sfery wpisanej wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. Przekrój sześcianu płaszczyzną może być

.... trójkątem równobocznym,

.... trójkątem prostokątnym,

.... trapezem nierównoramiennym.

20. Dany jest sześcian jednostkowy $\mathcal{S}$. Zbiór $\mathcal{A}$ składa się ze wszystkich wierzchołków sześcianu $\mathcal{S}$, środków wszystkich krawędzi sześcianu $\mathcal{S}$, środków wszystkich ścian sześcianu $\mathcal{S}$ i środka sześcianu $\mathcal{S}$. Wówczas

.... liczba $|\mathcal{A}| + 1$ jest liczbą doskonałą[3],

.... istnieją punkty zbioru $\mathcal{A}$, których odległość wynosi $1/2$,

.... istnieje 50 podzbiorów zbioru $\mathcal{A}$ składających się z trzech punktów współliniowych.

$\infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty \quad \infty$

2. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach.

Punktacja: Za każde zadanie tekstowe można zdobyć liczbę punktów ze zbioru $[\,0;\,10\,] \cap \mathbb{Z}$.

ZADANIE 1. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, gdzie $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$, zachodzi równość $m(\sphericalangle BIO) = 90^\circ$ (I jest środkiem okręgu wpisanego, a O jest środkiem okręgu opisanego). Wyznaczyć długości a, b przyprostokątnych, jeżeli wiadomo, że długość przeciwprostokątnej c jest równa 10.

ZADANIE 2. W turnieju szachowym uczestniczyło dwóch juniorów i $n > 8$ seniorów. Każdy uczestnik grał z każdym dokładnie raz. Juniorzy zdobyli łącznie 8 punktów, a każdy senior zdobył tyle samo punktów. Wyznaczyć n, jeżeli za zwycięstwo w danej partii dostaje się 1 punkt, za remis $1/2$ punktu, a za przegraną 0 punktów.

[3] Liczbę naturalną n nazywamy *doskonałą*, gdy suma jej wszystkich dzielników naturalnych jest równa $2n$. Symbolem $|\mathcal{X}|$ oznaczamy liczbę elementów (skończonego) zbioru $\mathcal{X}$.