LIX MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

I. TEST – Odpowiedzi

1. Równanie $xy + 20x + 18y = 2018$ ma:

$\boxed{\text{TAK}}$ nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych,

$\boxed{\text{NIE}}$ tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych,

$\boxed{\text{TAK}}$ dokładnie 16 rozwiązań w liczbach całkowitych.

2. Dane są liczby $\alpha = (\sqrt{18} + \sqrt{17})^{16}$ i $\beta = (\sqrt{18} - \sqrt{17})^{16}$. Wówczas

$\boxed{\text{NIE}}$ liczba $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ jest liczbą niewymierną,

$\boxed{\text{TAK}}$ liczba $\alpha^2 + \beta^2$ jest liczbą wymierną,

$\boxed{\text{NIE}}$ $10^{10}\beta > 1$.

3. Istnieją takie trzy różne liczby naturalne nieparzyste $k,\ l,\ m,$ że:

$\boxed{\text{TAK}}$ ciąg $\frac{1}{k},\ \frac{1}{l},\ \frac{1}{m}$ jest ciągiem geometrycznym,

$\boxed{\text{NIE}}$ zachodzi równość $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2018}$,

$\boxed{\text{TAK}}$ ciąg $\frac{1}{k},\ \frac{1}{l},\ \frac{1}{m}$ jest ciągiem arytmetycznym.

4. Przez L_n oznaczamy sumę $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$\boxed{\text{TAK}}$ L_n jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą,

$\boxed{\text{TAK}}$ L_n jest liczbą podzielną przez n wtedy i tylko wtedy, gdy $3 \nmid n$,

$\boxed{\text{TAK}}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $3L_n + n = 4n^3$.

5. Dana jest liczba rzeczywista α. Przez a_n oznaczamy liczbę $\frac{1}{n}\lfloor n\alpha \rfloor$. Wówczas:

$\boxed{\text{TAK}}$ ciąg (a_n) jest ciągiem stałym wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą całkowitą,

$\boxed{\text{NIE}}$ jeżeli $\alpha > 0$ jest liczbą niewymierną, to ciąg (a_n) jest ciągiem (ściśle) rosnącym,

$\boxed{\text{TAK}}$ ciąg (a_n) jest zbieżny do α.

6. Ciąg (a_n) jest takim ciągiem geometrycznym, że w zbiorze $\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{100}\}$ jest dokładnie 7 liczb wymiernych i 93 liczb niewymiernych. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym,

$\boxed{\text{NIE}}$ w zbiorze $\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{1000}\}$ jest dokładnie 71 liczb wymiernych,

$\boxed{\text{NIE}}$ w zbiorze $\{a_1^2,\ a_2^2, \ldots,\ a_{100}^2\}$ jest dokładnie 14 liczb wymiernych.

7. Przez $D_{10}(n)$ oznaczamy sumę cyfr dziesiętnych, a przez $D_2(n)$ sumę cyfr dwójkowych liczby naturalnej n. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ $D_2(n) \leqslant D_{10}(n)$ dla każdej liczby naturalnej n,

$\boxed{\text{TAK}}$ istnieją takie liczby naturalne $n > 1$, że $D_{10}(n) = D_2(n)$,

$\boxed{\text{NIE}}$ jeżeli $7|n$, to $3|D_2(n)$.

8. Dwie różne proste k, l przecinają się w punkcie A. Niech $P \notin k \cup l$ będzie punktem płaszczyzny wyznaczonej przez k, l. Wówczas istnieją takie punkty $B \in k$ i $C \in l$, że:

$\boxed{\text{NIE}}$ punkt P jest ortocentrum trójkąta $\triangle ABC$,

$\boxed{\text{TAK}}$ odcinek $\overline{AP}$ jest środkową w trójkącie $\triangle ABC$,

$\boxed{\text{NIE}}$ punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ABC$.

9. $ABCD$ jest czworokątem. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ jeżeli $\operatorname{ctg} \sphericalangle A = \operatorname{ctg} \sphericalangle B = \operatorname{ctg} \sphericalangle C = \operatorname{ctg} \sphericalangle D$, to $ABCD$ jest prostokątem,

$\boxed{\text{NIE}}$ jeżeli $\sin \sphericalangle A = \sin \sphericalangle C$, to $ABCD$ jest czworokątem cyklicznym,

$\boxed{\text{TAK}}$ może zachodzić nierówność $2017(|AC| + |BD|) < |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$.

10. Okrąg wpisany w dany trójkąt $\triangle ABC$ jest styczny do prostej BC w punkcie D, do prostej CA w punkcie E i do prostej AB w punkcie F. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ (pół)proste h_{AD}, h_{BE} i h_{CF} są dwusiecznymi kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$,

$\boxed{\text{NIE}}$ zachodzi nierówność $S_{\triangle ABC} \leqslant 4S_{\triangle DEF}$,

$\boxed{\text{TAK}}$ proste AD, BE, CF są współpękowe (tzn. przechodzą przez jeden punkt).

11. Mamy szesnastokąt foremny. Trójkąt o wierzchołkach w wierzchołkach tego szesnastokąta nazwiemy *wyróżnionym*. Wówczas

$\boxed{\text{TAK}}$ trójkątów wyróżnionych rozwartokątnych jest więcej niż 330,

$\boxed{\text{TAK}}$ trójkątów wyróżnionych prostokątnych jest 112,

$\boxed{\text{TAK}}$ trójkątów wyróżnionych ostrokątnych jest 112.

12. Cztery punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wówczas:

$\boxed{\text{TAK}}$ środki odcinków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ leżą na jednej płaszczyźnie,

$\boxed{\text{TAK}}$ istnieje siedem płaszczyzn jednakowo odległych od każdego z punktów A, B, C, D,

$\boxed{\text{TAK}}$ środki ciężkości trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$ leżą na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny BCD.

13. W przestrzeni dane są dwie proste s k o ś n e k i l, i punkt $A \notin k \cup l$. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ istnieje prosta przechodząca przez punkt A i przecinająca obie proste $k,\ l$,

$\boxed{\text{NIE}}$ istnieje sfera o środku w punkcie A styczna do obu prostych $k,\ l$,

$\boxed{\text{TAK}}$ istnieje sfera przechodząca przez punkt A styczna do obu prostych $k,\ l$.

14. Niech $\mathcal{W}$ będzie wielościanem wypukłym, którego wierzchołkami są środki wszystkich krawędzi sześcianu jednostkowego. Wówczas:

$\boxed{\text{TAK}}$ objętość wielościanu $\mathcal{W}$ jest równa $\frac{5}{6}$,

$\boxed{\text{TAK}}$ istnieje sfera opisana na wielościanie $\mathcal{W}$,

$\boxed{\text{NIE}}$ istnieje sfera wpisana w wielościan $\mathcal{W}$.

15. W przestrzeni z zadanym prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych dane są punkty $A = (0,\ 0,\ 0)$, $B = (1,\ 2,\ 3)$, $C = (9,\ -6,\ 1)$. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem równoramiennym,

$\boxed{\text{TAK}}$ trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem prostokątnym,

$\boxed{\text{NIE}}$ pole trójkąta $\triangle ABC$ jest mniejsze niż 20.

16. Przez $\int_a^b f(x)dx$ oznaczamy pole obszaru ograniczonego osią x-ów, prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ oraz wykresem funkcji nieujemnej $f : [\,a;\ b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas:

$\boxed{\text{TAK}}$ $\int_0^{10} \langle 2x \rangle dx = \int_0^{10} \langle x \rangle dx$, gdzie $\langle u \rangle := \min\{\{u\},\ 1 - \{u\}\}$, a $\{u\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej u,

$\boxed{\text{NIE}}$ $\int_0^{\pi} |\sin 2x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx$,

$\boxed{\text{TAK}}$ $\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx$.

17. Niech $\log_{21} 7 = c$. Wówczas:

$\boxed{\text{NIE}}$ c jest liczbą wymierną,

$\boxed{\text{TAK}}$ $\log_7 21 = c^{-1}$,

$\boxed{\text{TAK}}$ $\log_3 7 = \sum_{k=1}^{\infty} c^k$.

18. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy ciągiem typu *subar*, gdy dla dowolnych $k,\ l$ tej samej parzystości zachodzi nierówność $a_{\frac{k+l}{2}} \leqslant \frac{a_k + a_l}{2}$. Wówczas:

$\boxed{\text{TAK}}$ każdy ciąg arytmetyczny jest ciągiem typu *subar*,

$\boxed{\text{TAK}}$ ciąg $(a_n) = (n^3)$ jest ciągiem typu *subar*,

$\boxed{\text{TAK}}$ jeżeli $(a_n),\ (b_n)$ są typu *subar*, to ciąg $(c_n) := (\max\{a_n,\ b_n\})$ jest typu *subar*.

19. Niech (a_n) będzie takim ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich, że ciąg (b_n) określony przez $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem zbieżnym do granicy dodatniej. Wówczas:

NIE ciąg (a_n) jest zbieżny,

TAK ciąg $(\frac{a_n}{n})$ jest zbieżny,

TAK ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym od pewnego miejsca.

20. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = |x-2| + |x-1| + |x+1| + |x+2|$. Wówczas:

TAK funkcja f jest parzysta,

NIE równanie $f(x) = 3x + 4$ ma dokładnie trzy rozwiązania,

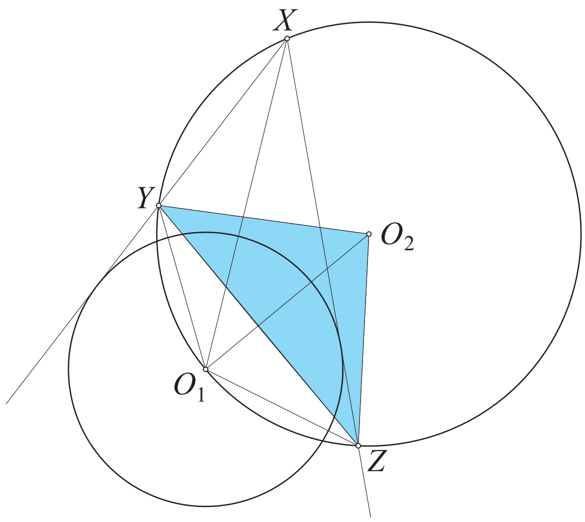
TAK dla dowolnych x, y zachodzi nierówność $f(\frac{x+3y}{4}) \leqslant \frac{f(x)+3f(y)}{4}$.

II. ZADANIA TEKSTOWE – Rozwiązania

II.1. Niech O_1 i O_2 będą środkami danych okręgów. Z zasadniczego twierdzenia planimetrii wiemy, że O_1X jest dwusieczną kąta $\sphericalangle YXZ$. Wobec tego kąty (wpisane w okrąg $\mathcal{K}_2$) $\sphericalangle YXO_1$ i $\sphericalangle ZXO_1$ mają równe miary. Zatem (odpowiadające im) kąty środkowe

$$\sphericalangle YO_2O_1, \quad \sphericalangle ZO_2O_1$$

również mają równe miary. To znaczy, że O_2O_1 jest dwusieczną w trójkącie równoramiennym(!) $\triangle YZO_2$. Taka dwusieczna w trójkącie równoramiennym jest jednocześnie wysokością. Ostatecznie, $O_2O_1 \perp YZ$.



II.2. Oznaczmy przez P, G, L i D elementarny ruch w prawo, w górę, w lewo i w dół odpowiednio. Wówczas, każde interesujące nas przejście od A do B jest kodowane przez ciąg o wyrazach ze zbioru $\{\mathrm{P}, \mathrm{G}, \mathrm{L}, \mathrm{D}\}$, przy czym spełnione są warunki:

(1) Jeżeli nie wykonujemy ruchów w lewo ani w dół, to ciąg ma długość 6, w tym 3 wyrazy równe P i 3 wyrazy równe G;

(2) Jeżeli wykonujemy jeden ruch w lewo i nie wykonujemy ruchów w dół, to ciąg ma długość 8, w tym cztery wyrazy równe P, jeden wyraz równy L i 3 wyrazy równe G;

(3) Jeżeli wykonujemy jeden ruch w dół i nie wykonujemy ruchów w lewo, to ciąg ma długość 8, w tym cztery wyrazy równe G, jeden wyraz równy D i 3 wyrazy równe P;

(4) Jeżeli wykonujemy jeden ruch w dół i jeden ruch w lewo, to ciąg ma długość 10, w tym 4 wyrazy równe P, jeden wyraz równy L, 4 wyrazy równe G i jeden wyraz równy D.

Dodatkowo, w przypadku (2), przed i po wyrazie równym L występuje wyraz równy P (ruch w lewo nie może być ani pierwszym ani ostatnim ruchem poziomym!). Podobne ograniczenia spełniają ciągi w przypadkach (3) i (4). Biorąc to wszystko pod uwagę mamy:

Przejść typu (1) jest oczywiście dokładnie tyle samo co 3-elementowych podzbiorów w zbiorze 6-elementowym: $T_{(1)} = \binom{6}{3} = 20$. Dla wyznaczenia liczby przejść typu (2) postępujemy następująco: najpierw, na $\binom{8}{3}$ sposobów, wyznaczamy zbiór miejsc, na których umieszczamy literę G. Na pozostałych pięciu miejscach rozmieszczamy jeden z trzech podciągów PLPPP, PPLPP, PPPLP. Widzimy stąd, że $T_{(2)} = 3 \cdot \binom{8}{3} = 168$. Przejść typu (3) jest tyle samo co przejść typu (2). Uzasadniamy to tak samo jak przed chwilą, zamieniając litery "poziome" P i L na "pionowe" G i D odpowiednio. Równoważnie (używając języka geometrycznego), przez odbicie w prostej AB), każdemu przejściu typu (2) bijektywnie przyporządkowujemy przejście typu (3). Wobec tego $T_{(3)} = 168$. Wyznaczając liczbę przejść typu (4) postępujemy następująco: najpierw, na $\binom{10}{5}$ sposobów, wyznaczamy 5-elementowy zbiór miejsc, na każdym z których, podobnie jak wyżej, rozmieścimy jeden z trzech podciągów PLPPP, PPLPP, PPPLP. Mamy więc $3 \cdot \binom{10}{5}$ sposobów rozmieszczenia elementarnych ruchów w poziomie. Do każdego z tych sposobów, na pozostałych pięciu miejscach rozmieszczamy jeden z trzech podciągów GDGGG, GGDGG, GGGDG. Mamy więc $T_{(4)} = 3 \cdot 3 \cdot \binom{10}{5} = 9 \cdot 252 = 2268$.

Ostatecznie: $T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)} + T_{(4)} = 20 + 168 + 168 + 2268 = \boxed{2624}$.