LIX MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

17. 03. 2018

I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów wpisując TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami. Punktacja: $\mathbf{1}$ punkt za każdą poprawną odpowiedź, $\mathbf{0}$ punktów za brak odpowiedzi, $\mathbf{-1}$ punkt za odpowiedź niepoprawną i $\mathbf{1}$ punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

1. Równanie $xy + 20x + 18y = 2018$ ma:

.... nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych,

.... tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych,

.... dokładnie 16 rozwiązań w liczbach całkowitych.

2. Dane są liczby $\alpha = (\sqrt{18} + \sqrt{17})^{16}$ i $\beta = (\sqrt{18} - \sqrt{17})^{16}$. Wówczas

.... liczba $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ jest liczbą niewymierną,

.... liczba $\alpha^2 + \beta^2$ jest liczbą wymierną,

.... $10^{10}\beta > 1$.

3. Istnieją takie trzy różne liczby naturalne nieparzyste k, l, m, że:

.... ciąg $\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}$ jest ciągiem geometrycznym,

.... zachodzi równość $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2018}$,

.... ciąg $\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}$ jest ciągiem arytmetycznym.

4. Przez L_n oznaczamy sumę $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

.... L_n jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą,

.... L_n jest liczbą podzielną przez n wtedy i tylko wtedy, gdy $3 \nmid n$,

.... dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $3L_n + n = 4n^3$.

5. Dana jest liczba rzeczywista α. Przez a_n oznaczamy liczbę $\frac{1}{n}\lfloor n\alpha \rfloor$. Wówczas:

.... ciąg (a_n) jest ciągiem stałym wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą całkowitą,

.... jeżeli $\alpha > 0$ jest liczbą niewymierną, to ciąg (a_n) jest ciągiem (ściśle) rosnącym,

.... ciąg (a_n) jest zbieżny do α.

6. Ciąg (a_n) jest takim ciągiem geometrycznym, że w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$ jest dokładnie 7 liczb wymiernych i 93 liczb niewymiernych. Wówczas:

.... ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym,

.... w zbiorze $\{a_1, a_2, \ldots, a_{1000}\}$ jest dokładnie 71 liczb wymiernych,

.... w zbiorze $\{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{100}^2\}$ jest dokładnie 14 liczb wymiernych.

7. Przez $D_{10}(n)$ oznaczamy sumę cyfr dziesiętnych, a przez $D_2(n)$ sumę cyfr dwójkowych liczby naturalnej n. Wówczas:

.... $D_2(n) \leqslant D_{10}(n)$ dla każdej liczby naturalnej n,

.... istnieją takie liczby naturalne $n > 1$, że $D_{10}(n) = D_2(n)$,

.... jeżeli $7|n$, to $3|D_2(n)$.

8. Dwie różne proste k, l przecinają się w punkcie A. Niech $P \notin k \cup l$ będzie punktem płaszczyzny wyznaczonej przez k, l. Wówczas istnieją takie punkty $B \in k$ i $C \in l$, że:

.... punkt P jest ortocentrum trójkąta $\triangle ABC$,

.... odcinek $\overline{AP}$ jest środkową w trójkącie $\triangle ABC$,

.... punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ABC$.

9. $ABCD$ jest czworokątem. Wówczas:

.... jeżeli $\operatorname{ctg} \sphericalangle A = \operatorname{ctg} \sphericalangle B = \operatorname{ctg} \sphericalangle C = \operatorname{ctg} \sphericalangle D$, to $ABCD$ jest prostokątem,

.... jeżeli $\sin \sphericalangle A = \sin \sphericalangle C$, to $ABCD$ jest czworokątem cyklicznym,

.... może zachodzić nierówność $2017(|AC| + |BD|) < |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$.

10. Okrąg wpisany w dany trójkąt $\triangle ABC$ jest styczny do prostej BC w punkcie D, do prostej CA w punkcie E i do prostej AB w punkcie F. Wówczas:

.... (pół)proste h_{AD}, h_{BE} i h_{CF} są dwusiecznymi kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$,

.... zachodzi nierówność $S_{\triangle ABC} \leqslant 4S_{\triangle DEF}$,

.... proste AD, BE, CF są współpękowe (tzn. przechodzą przez jeden punkt).

11. Mamy szesnastokąt foremny. Trójkąt o wierzchołkach w wierzchołkach tego szesnastokąta nazwiemy *wyróżnionym*. Wówczas

.... trójkątów wyróżnionych rozwartokątnych jest więcej niż 330,

.... trójkątów wyróżnionych prostokątnych jest 112,

.... trójkątów wyróżnionych ostrokątnych jest 112.

12. Cztery punkty A, B, C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wówczas:

.... środki odcinków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ leżą na jednej płaszczyźnie,

.... istnieje siedem płaszczyzn jednakowo odległych od każdego z punktów A, B, C, D,

.... środki ciężkości trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$ leżą na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny BCD.

13. W przestrzeni dane są dwie proste s k o ś n e k i l, i punkt $A \notin k \cup l$. Wówczas:

.... istnieje prosta przechodząca przez punkt A i przecinająca obie proste k, l,

.... istnieje sfera o środku w punkcie A styczna do obu prostych k, l,

.... istnieje sfera przechodząca przez punkt A styczna do obu prostych k, l.

14. Niech $\mathcal{W}$ będzie wielościanem wypukłym, którego wierzchołkami są środki wszystkich krawędzi sześcianu jednostkowego. Wówczas:

.... objętość wielościanu $\mathcal{W}$ jest równa $\frac{5}{6}$,

.... istnieje sfera opisana na wielościanie $\mathcal{W}$,

.... istnieje sfera wpisana w wielościan $\mathcal{W}$.

15. W przestrzeni z zadanym prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych dane są punkty $A = (0,\, 0,\, 0)$, $B = (1,\, 2,\, 3)$, $C = (9,\, -6,\, 1)$. Wówczas:

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem równoramiennym,

.... trójkąt $\triangle ABC$ jest trójkątem prostokątnym,

.... pole trójkąta $\triangle ABC$ jest mniejsze niż 20.

16. Przez $\int_a^b f(x)dx$ oznaczamy pole obszaru ograniczonego osią x-ów, prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$ oraz wykresem funkcji nieujemnej $f : [\,a;\, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas:

.... $\int_0^{10} \langle 2x \rangle dx = \int_0^{10} \langle x \rangle dx$, gdzie $\langle u \rangle := \min\{\{u\},\, 1 - \{u\}\}$, a $\{u\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej u,

.... $\int_0^{\pi} |\sin 2x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx$,

.... $\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx$.

17. Niech $\log_{21} 7 = c$. Wówczas:

.... c jest liczbą wymierną,

.... $\log_7 21 = c^{-1}$,

.... $\log_3 7 = \sum_{k=1}^{\infty} c^k$.

18. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy ciągiem typu *subar*, gdy dla dowolnych k, l tej samej parzystości zachodzi nierówność $a_{\frac{k+l}{2}} \leqslant \frac{a_k+a_l}{2}$. Wówczas:

.... każdy ciąg arytmetyczny jest ciągiem typu *subar*,

.... ciąg $(a_n) = (n^3)$ jest ciągiem typu *subar*,

.... jeżeli (a_n), (b_n) są typu *subar*, to ciąg $(c_n) := (\max\{a_n, b_n\})$ jest typu *subar*.

19. Niech (a_n) będzie takim ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich, że ciąg (b_n) określony przez $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem zbieżnym do granicy dodatniej. Wówczas:

.... ciąg (a_n) jest zbieżny,

.... ciąg $(\frac{a_n}{n})$ jest zbieżny,

.... ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym od pewnego miejsca.

20. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = |x-2| + |x-1| + |x+1| + |x+2|$. Wówczas:

.... funkcja f jest parzysta,

.... równanie $f(x) = 3x + 4$ ma dokładnie trzy rozwiązania,

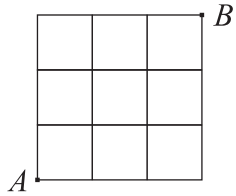
.... dla dowolnych x, y zachodzi nierówność $f(\frac{x+3y}{4}) \leqslant \frac{f(x)+3f(y)}{4}$.

II. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0;\ 10]$ *(ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).*

1. Okrąg $\mathcal{K}_2$ przechodzi przez środek okręgu $\mathcal{K}_1$. Przez punkt $X \in \mathcal{K}_2$ przechodzą dwie (różne) proste styczne do okręgu $\mathcal{K}_1$. Jedna z nich przecina okrąg $\mathcal{K}_2$ w punktach X i Y, a druga, w punktach X i Z. Udowodnić, że prosta YZ jest prostopadła do prostej łączącej środki okręgów $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$.

2. Dana jest "krata" 3×3 jak na rysunku. Na ile różnych sposobów można przejść po liniach tej kraty z punktu A do punktu B, jeżeli dopuszczalne są ruchy w prawo, w górę, co najwyżej jeden ruch w lewo i co najwyżej jeden ruch w dół? (*Ruchem* nazywamy tu przejście odcinka łączącego sąsiednie węzły kraty.)



Uwagi. (1) Czas trwania Zawodów: 180 minut. (2) **Ortocentrum** trójkąta jest punktem przecięcia jego wysokości. (3) Czworokąt nazywamy **cyklicznym**, gdy da się na nim opisać okrąg. (4) Przez $S_{\triangle XYZ}$ oznaczamy pole trójkąta $\triangle XYZ$. (5) **Środkiem ciężkości** trójkąta nazywamy punkt przecięcia jego środkowych.