LX Międzyszkolne Zawody Matematyczne

I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów wpisując TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami. P u n k t a c j a: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:
(1) $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 *nie jest* liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
(2) $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga) x, czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x.
(3) $\{x\}$ – część ułamkowa liczby rzeczywistej x, czyli różnica $x - \lfloor x \rfloor$.

1. Niech $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x, a $\{x\}$ część ułamkową. Wówczas

   TAK dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$;

   NIE równanie $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 2018$ ma rozwiązanie;

   TAK równanie $\{x\} + \{2x\} + ... + \{2019x\} = 2018$ ma rozwiązanie.

2. Każdy trójkąt można pociąć na

   TAK cztery trójkąty przystające;

   TAK trzy trójkąty prostokątne;

   NIE dwa trójkąty podobne.

3. Dany jest układ równań $\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$. Wówczas

   TAK jeżeli $a = 4$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań;

   NIE jeżeli $a = 29$, to układ posiada rozwiązania wymierne;

   TAK istnieje takie $a > 0$, że układ ma tylko rozwiązania całkowite.

4. Sześcian przecięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pięciokąt. Wówczas

   NIE płaszczyzna ta musi przechodzić przez jeden z wierzchołków sześcianu;

   TAK wśród kątów wewnętrznych pięciokąta znajdą się takie trzy, których suma wynosi $360°$;

   NIE pięciokąt ten może być foremny.

5. Jeśli liczby k, m, n są liczbami naturalnymi i $k = m + n$, to

   TAK $k!$ dzieli się przez $m!$;

   NIE $\frac{k!}{m!} = n!$;

   TAK $k!$ dzieli się przez $m! \cdot n!$.

6. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^n + n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

   NIE liczba a_{2019} jest podzielna przez 9;

   NIE a_n jest podzielne przez 100 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 100;

   TAK istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że ostatnią cyfrą a_n jest 4.

7. Dla pewnej liczby rzeczywistej α układ równań $\begin{cases} x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha = 1 \\ x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha = 1 \end{cases}$

   TAK nie ma rozwiązań;

   TAK ma nieskończenie wiele rozwiązań;

   NIE ma dokładnie dwa rozwiązania.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$ i dany będzie wielomian n-tego stopnia $W(x) = 2 + \frac{1}{2}x + 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots + 2^{(-1)^n}x^n$. Wówczas

   NIE liczba $\frac{W(-1)+W(1)}{2}$ jest liczbą nieparzystą dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

   TAK dla n nieparzystych wielomian ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty;

   NIE $W(x) \geq x$ dla każdego x bez względu na n.

9. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$. Wówczas

   TAK w ostrosłupie $BCDC'$ miara każdego kąta dwuściennego należy do przedziału $(45°, 90°]$;

   TAK w ostrosłupie $ABDA'$ miara każdego nieprostego kąta płaskiego należy do przedziału $(44°, 65°)$;

   TAK środek kuli opisanej na ostrosłupie $ABCB'$ leży na zewnątrz ostrosłupa.

10. Niech funkcja S przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej sumę jej cyfr. Istnieje taka liczba naturalna n, że

    TAK $S(n^2) = 10$;

    NIE $S(n^2) = 15$;

    NIE $S(n^2) = 2$.

11. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_k)^2$, gdzie $k \geq 2$. Wynika stąd, że funkcja f

    TAK f jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 + ... + a_k = 0$;

    TAK ma co najwyżej jedno miejsce zerowe;

    TAK najmniejszą wartość przyjmuje dla $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$.

12. Równanie $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = x$ ma

    NIE rozwiązania dodatnie;

    NIE rozwiązania niewymierne;

    TAK nieskończenie wiele rozwiązań.

13. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \log_{n+1}(3n+3)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

    TAK istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ takich, że a_n jest liczbą wymierną;

    TAK ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym;

    NIE ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

14. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że równanie $ax^2 + bx + c = |x|$ ma

    TAK dokładnie dwa rozwiązania;

    TAK dokładnie trzy rozwiązania;

    TAK nieskończenie wiele rozwiązań.

15. Istnieją takie dwie liczby naturalne $m, n > 1$, że iloraz $\mathrm{NWW}(m,n)/\,\mathrm{NWD}(m,n)$ jest równy

    NIE $180/11$;

    TAK $180/12$;

    TAK $180!/13^{13}$.

16. Istnieje wielościan wypukły, który ma

    NIE dokładnie 7 krawędzi;

    TAK dokładnie 29 krawędzi;

    TAK dokładnie 2019 krawędzi.

17. Rozważmy 2019–kąt foremny. Wówczas

    NIE z jego wierzchołków można utworzyć nie więcej niż 10^9 pięciokątów;

    NIE można z wierzchołków tego 2019-kąta utworzyć 200-kąt foremny;

    TAK stosunek pola koła opisanego na tym 2019-kącie do jego pola wynosi $\frac{2\pi}{2019}\Big/\sin\left(\frac{2\pi}{2019}\right)$.

18. Dany jest okrąg o równaniu $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ i prosta k o równaniu $y = ax + a$. Wobec tego

    NIE istnieje taka liczba rzeczywista a, że środek danego okręgu należy do prostej k;

    NIE istnieje taka liczba rzeczywista a, że odległość od środka okręgu do prostej k jest większa niż 1;

    TAK dla każdej liczby rzeczywistej a, prosta k ma dwa punkty wspólne z danym okręgiem.

19. Pole trójkąta $\triangle ABC$ jest równe S. Punkty K, L, M należą odpowiednio do boków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|} = 2$. Wówczas

    NIE pole trójkąta $\triangle KBL$ jest równe $\frac{1}{9}S$;

    TAK pole trójkątów $\triangle AKM$, $\triangle KBL$ i $\triangle LCM$ są równe;

    NIE trójkąt $\triangle KLM$ jest podobny do $\triangle CAB$.

20. Na tablicy znajduje się 2019 punktów ponumerowanych liczbami $1, \ldots, 2019$, przy czym żadne 3 z tych punktów nie są współliniowe.

    TAK Można podzielić te punkty na 673 trójki, które będą stanowić wierzchołki trójkątów o parami rozłącznych wnętrzach.

    NIE Można podzielić te punkty na 673 trójki takie, że suma numerów w każdej z tych trójek jest taka sama.

    TAK Nauczyciel wymazał dwa losowe punkty wraz z ich numerami. Prawdopodobieństwo, że suma pozostałych numerów jest nieparzysta wynosi co najmniej $\frac{1}{2}$.

II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0; 10]$ (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wyznaczyć największą liczbę części, na jakie 10 płaszczyzn dzieli przestrzeń.

2. Trzy okręgi K_1, K_2, K_3 o promieniu 1 każdy mają punkt wspólny P. Ponadto $K_1 \cap K_2 = \{P, C\}$, $K_2 \cap K_3 = \{P, A\}$, $K_1 \cap K_3 = \{P, B\}$, gdzie punkty $A \neq P$ i $B \neq P$ i $C \neq P$. Udowodnić, że punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta i że promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 1.

Rozwiązanie zadania nr 1

W pierwszym kroku pokżemy, że maksymalna liczba obszarów (oznaczmy ją przez S_n) na jaką n prostych dzieli płaszczyznę spełnia następującą zależność rekurencyjną

$$S_{n+1} = S_n + (n+1), \quad n > 0, \quad S_1 = 2. \tag{1}$$

Istotnie, zauważmy, że jeśli n prostych dzieli płaszczyznę na S części to narysowanie $(n+1)$-szej prostej spowoduje zwiększenie ilości części o $m+1$, gdzie m jest liczbą przecięć ostatniej prostej z pozostałymi prostymi. Z drugiej strony liczba przecięć nie przekracza liczby n i jest jej równa np. w sytuacji gdy żadne dwie proste nie są równoległe oraz żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie. Oczywiście możliwe jest poprowadzenie dowolnej ilości prostych na płaszczyźnie w taki sposób. Oznacza to, że

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).$$

Następnie podobne rozumowanie przeprowadzmy dla płaszczyn w przestrzeni. Jeśli n płaszczyzn $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ podzieliło przestrzeń na P części to dodatkowa płaszczyzna Π_{n+1} zwiększy tę liczbę o S, gdzie S jesli liczbą obszarów na jakie płaszczyzna Π_{n+1} została podzielona prostymi $\ell_k := \Pi_{n+1} \cap \Pi_k, k = 1, \ldots, n$. Liczba m powstałych prostych nie przekracza n (zbiór ℓ_k może być pusty, być prostą lub płaszczyzną), a zatem liczba S nie przekracza S_n. Należy jeszcze uzasadnić, że kolejne płaszczyzny można wybierać w taki sposób aby $S = S_n$. Istotnie, wybór płaszczyn prowadziny w taki sposób aby każda kolejna płaszczyzna

- nie była równoległa do żadnej z poprzednich płaszczyzn (wtedy przy dowolnym $k = 1, \ldots, n$ zbiór ℓ_k będzie prostą) ani do żadnej prostej utworzonej z przecięcia poprzednich płaszczyzn (wtedy żadne dwie spośród prostych ℓ_k nie będą równoległe oraz każde trzy płaszczyzny będą miały dokładnie jeden punkt wspólny). Możemy tak wybrać z uwagi na nieskończoną ilość dostępnych kierunków dokładanej płaszczyzny oraz skończoną liczbę zastrzeżonych.
- nie zawierała punktu przecięcia dowolnych z trzech wcześniej wybranych płaszczyzn - punktów takich jest skończenie wiele przy każdym n, w odróżnieniu od dostępnych położeń płaszczyzny o ustalonym nachyleniu.

Oznaczmy przez P_n maksymalną liczbę obszarów utworzoną przez n płaszczyzn. Z przedstawionego rozumowania wynika, że

$$P_{n+1} = P_n + S_n, \quad n > 0. \tag{2}$$

Biorąc pod uwagę otrzymane wzory rekurencyjne (1), (2) oraz fakt $P_1 = 2$ dostajemy

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56
P_n	2	4	8	15	26	42	64	93	130	176

Odp. $P_{10} = 176$.

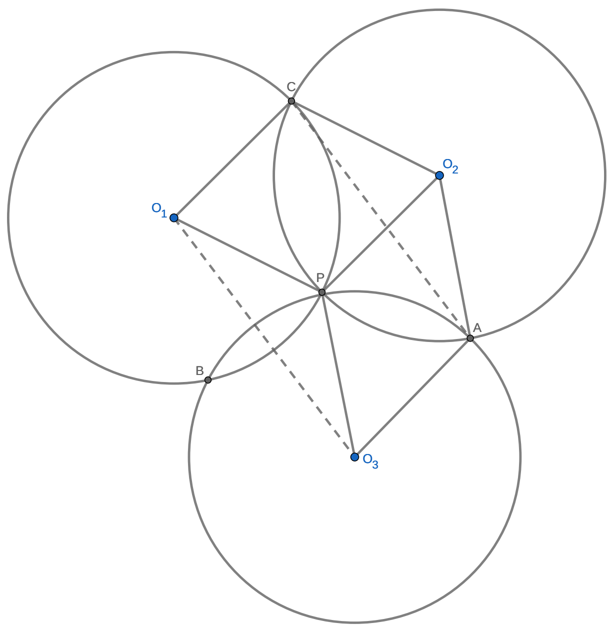
ZADANIE 2 Trzy okręgi K_1, K_2, K_3 o promieniu 1 każdy mają wspólny punkt P. Ponadto $K_1 \cap K_2 = \{P, C\}$, $K_2 \cap K_3 = \{P, A\}$, $K_1 \cap K_3 = \{P, B\}$, gdzie punkty $A \neq P$, $B \neq P$ i $C \neq P$. Udowodnić, że punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta, i że promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 1.

ROZWIĄZANIE: Niech $K_1 = \mathcal{K}(O_1, 1), K_2 = \mathcal{K}(O_2, 1), K_3 = \mathcal{K}(O_3, 1)$. Jako że są to parami różne okręgi, punkty O_1, O_2, O_3 są parami różne. Z treści wynika, że $\{O_1, O_2, O_3\} \subset \mathcal{K}(P, 1)$. Skoro są to trzy różne punkty na okręgu, to tworzą trójkąt.

Pokażemy, że zachodzą następujące równości:

$$|O_1O_3| = |AC|,\ |O_1O_2| = |AB|,\ |O_2O_3| = |BC|.$$

Wynika z nich, że punkty A, B, C tworzą trójkąt i, co więcej, jest on przystający do trójkąta $\triangle O_1O_2O_3$. Ale promienie okręgów opisanych na trójkątach przystających są takie same, zaś opisany na $\triangle O_1O_2O_3$ jest $\mathcal{K}(P, 1)$.



Wykażemy, że $|O_1O_3| = |AC|$. Czworokąt PO_2CO_1 jest rombem, bo wszystkie jego boki mają długość 1. Podobnie czworokąt PO_3AO_2 jest rombem. Zatem

$$O_3A \parallel PO_2 \parallel O_1C,$$

czyli $O_3A \parallel O_1C$. Stąd i z równości $|O_3A| = |O_1C| = 1$ wynika, że czworokąt O_1O_3AC jest równoległobokiem, więc mamy $|O_1O_3| = |CA|$. Pozostałych równości dowodzimy w analogiczny sposób. $\square$