LX Międzyszkolne Zawody Matematyczne

I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów wpisując TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami. P u n k t a c j a: 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:
(1) $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 *nie jest* liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
(2) $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga) x, czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x.
(3) $\{x\}$ – część ułamkowa liczby rzeczywistej x, czyli różnica $x - \lfloor x \rfloor$.

1. Niech $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x, a $\{x\}$ część ułamkową. Wówczas

   .... dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$;

   .... równanie $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 2018$ ma rozwiązanie;

   .... równanie $\{x\} + \{2x\} + ... + \{2019x\} = 2018$ ma rozwiązanie.

2. Każdy trójkąt można pociąć na

   .... cztery trójkąty przystające;

   .... trzy trójkąty prostokątne;

   .... dwa trójkąty podobne.

3. Dany jest układ równań $\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$. Wówczas

   .... jeżeli $a = 4$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań;

   .... jeżeli $a = 29$, to układ posiada rozwiązania wymierne;

   .... istnieje takie $a > 0$, że układ ma tylko rozwiązania całkowite.

4. Sześcian przecięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pięciokąt. Wówczas

   .... płaszczyzna ta musi przechodzić przez jeden z wierzchołków sześcianu;

   .... wśród kątów wewnętrznych pięciokąta znajdą się takie trzy, których suma wynosi $360°$;

   .... pięciokąt ten może być foremny.

5. Jeśli liczby k, m, n są liczbami naturalnymi i $k = m + n$, to

.... $k!$ dzieli się przez $m!$;

.... $\frac{k!}{m!} = n!$;

.... $k!$ dzieli się przez $m! \cdot n!$.

6. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^n + n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

.... liczba a_{2019} jest podzielna przez 9;

.... a_n jest podzielne przez 100 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 100;

.... istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że ostatnią cyfrą a_n jest 4.

7. Dla pewnej liczby rzeczywistej α układ równań $\begin{cases} x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha = 1 \\ x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha = 1 \end{cases}$

.... nie ma rozwiązań;

.... ma nieskończenie wiele rozwiązań;

.... ma dokładnie dwa rozwiązania.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$ i dany będzie wielomian n-tego stopnia $W(x) = 2 + \frac{1}{2}x + 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots + 2^{(-1)^n}x^n$. Wówczas

.... liczba $\frac{W(-1)+W(1)}{2}$ jest liczbą nieparzystą dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

.... dla n nieparzystych wielomian ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty;

.... $W(x) \geq x$ dla każdego x bez względu na n.

9. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$. Wówczas

.... w ostrosłupie $BCDC'$ miara każdego kąta dwuściennego należy do przedziału $(45°, 90°]$;

.... w ostrosłupie $ABDA'$ miara każdego nieprostego kąta płaskiego należy do przedziału $(44°, 65°)$;

.... środek kuli opisanej na ostrosłupie $ABCB'$ leży na zewnątrz ostrosłupa.

10. Niech funkcja S przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej sumę jej cyfr. Istnieje taka liczba naturalna n, że

.... $S(n^2) = 10$;

.... $S(n^2) = 15$;

.... $S(n^2) = 2$.

11. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_k)^2$, gdzie $k \geq 2$. Wynika stąd, że funkcja f

.... f jest funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 + ... + a_k = 0$;

.... ma co najwyżej jedno miejsce zerowe;

.... najmniejszą wartość przyjmuje dla $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$.

12. Równanie $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = x$ ma

.... rozwiązania dodatnie;

.... rozwiązania niewymierne;

.... nieskończenie wiele rozwiązań.

13. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \log_{n+1}(3n+3)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

.... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ takich, że a_n jest liczbą wymierną;

.... ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym;

.... ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

14. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że równanie $ax^2 + bx + c = |x|$ ma

.... dokładnie dwa rozwiązania;

.... dokładnie trzy rozwiązania;

.... nieskończenie wiele rozwiązań.

15. Istnieją takie dwie liczby naturalne $m, n > 1$, że iloraz $\mathrm{NWW}(m,n)/\,\mathrm{NWD}(m,n)$ jest równy

.... $180/11$;

.... $180/12$;

.... $180!/13^{13}$.

16. Istnieje wielościan wypukły, który ma

.... dokładnie 7 krawędzi;

.... dokładnie 29 krawędzi;

.... dokładnie 2019 krawędzi.

17. Rozważmy 2019–kąt foremny. Wówczas

.... z jego wierzchołków można utworzyć nie więcej niż 10^9 pięciokątów;

.... można z wierzchołków tego 2019-kąta utworzyć 200-kąt foremny;

.... stosunek pola koła opisanego na tym 2019-kącie do jego pola wynosi $\frac{2\pi}{2019}\Big/\sin\left(\frac{2\pi}{2019}\right)$.

18. Dany jest okrąg o równaniu $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ i prosta k o równaniu $y = ax + a$. Wobec tego

.... istnieje taka liczba rzeczywista a, że środek danego okręgu należy do prostej k;

.... istnieje taka liczba rzeczywista a, że odległość od środka okręgu do prostej k jest większa niż 1;

.... dla każdej liczby rzeczywistej a, prosta k ma dwa punkty wspólne z danym okręgiem.

19. Pole trójkąta $\triangle ABC$ jest równe S. Punkty K, L, M należą odpowiednio do boków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|} = 2$. Wówczas

.... pole trójkąta $\triangle KBL$ jest równe $\frac{1}{9}S$;

.... pole trójkątów $\triangle AKM$, $\triangle KBL$ i $\triangle LCM$ są równe;

.... trójkąt $\triangle KLM$ jest podobny do $\triangle CAB$.

20. Na tablicy znajduje się 2019 punktów ponumerowanych liczbami $1, \ldots, 2019$, przy czym żadne 3 z tych punktów nie są współliniowe.

.... Można podzielić te punkty na 673 trójki, które będą stanowić wierzchołki trójkątów o parami rozłącznych wnętrzach.

.... Można podzielić te punkty na 673 trójki takie, że suma numerów w każdej z tych trójek jest taka sama.

.... Nauczyciel wymazał dwa losowe punkty wraz z ich numerami. Prawdopodobieństwo, że suma pozostałych numerów jest nieparzysta wynosi co najmniej $\frac{1}{2}$.

II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0; 10]$ (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wyznaczyć największą liczbę części, na jakie 10 płaszczyzn dzieli przestrzeń.

2. Trzy okręgi K_1, K_2, K_3 o promieniu 1 każdy mają punkt wspólny P. Ponadto $K_1 \cap K_2 = \{P, C\}$, $K_2 \cap K_3 = \{P, A\}$, $K_1 \cap K_3 = \{P, B\}$, gdzie punkty $A \neq P$ i $B \neq P$ i $C \neq P$. Udowodnić, że punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta i że promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 1.