LXI Międzyszkolne Zawody Matematyczne

I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy.

Punktacja:
1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, −1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:
(1) $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
(2) $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga) x, czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x.

1. Liczba $2018^{2019^{2020}}$

   NIE ma co najmniej 3 dzielniki pierwsze,

   NIE ma w zapisie dziesiętnym cyfrę jedności 2,

   TAK ma w rozkładzie na czynniki pierwsze co najmniej 10^{6666} dwójek.

2. Niech $p(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby naturalnej n.

   TAK $45 \big| \big(p(1) + p(2) + \ldots + p(2020)\big)$,

   NIE $p(1) + p(2) + \ldots + p(10^n)$ jest ciągiem geometrycznym,

   TAK $p(1) + p(2) + \ldots + p(10^n) \leqslant 46^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

3. Istnieje funkcja ciągła $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

   TAK mająca nieskończenie wiele maksimów lokalnych,

   NIE mająca zbiór wartości $[0, +\infty)$,

   TAK przyjmująca nieskończenie wiele razy co najmniej trzy wartości.

4. Kwadrat można podzielić na n kwadratów, gdzie

   TAK n jest dowolną potęgą o wykładniku naturalnym liczby 4,

   TAK n jest dowolną liczbą parzystą większą niż 5,

   TAK n jest dowolną liczbą nieparzystą większą niż 5.

5. Wewnątrz kwadratu o boku 20 rozmieszczono n punktów w taki sposób, że odległość dowolnych dwóch punktów jest większa niż 3. Możliwe jest, że

   TAK $n = 50$,

   TAK $n = 59$,

   NIE $n = 75$.

6. Niech $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2$, $x > 0$.

NIE Zbiór wartości funkcji f składa się tylko z liczb całkowitych i jest skończony.

NIE $f(x) \leqslant \sqrt{3} \cdot x$.

TAK w każdym przedziale $[n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}$) funkcja ma co najwyżej $2n+1$ wartości.

7. Sześcian $ABCDEFG$ przecięto płaszczyzną prostopadłą do głównej przekątnej $\overline{AG}$. Niech $P(t)$ oznacza pole otrzymanego przekroju zawierającego punkt $X(t) = A + t \cdot \overrightarrow{AG}$, $t \in [0,1]$, a $R(t)$ promień okręgu opisanego na tym przekroju.

NIE Wykresem funkcji $P(t)$ jest łamana.

NIE Funkcja $R(t)$ jest rosnąca dla $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

NIE Wykresem funkcji $R(t)$ jest łamana.

8. Niech W i Q będą niestałymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Przez $\deg W$ oznaczamy stopień wielomianu W.

TAK $2|(\deg W + \deg Q) \implies \deg(W \cdot Q) = \deg W + \deg Q$

NIE $2|\deg W$ i $3|\deg Q \implies 6|\deg(W \cdot Q)$

NIE $3|\deg W$ i $3|\deg Q \implies 3|\deg(W + Q)$

9. Niech W będzie wielomianem stopnia $2n > 10$, $n \in \mathbb{N}$. Przez W' oznaczamy pochodną wielomianu W.

TAK Wielomian W osiąga każdą wartość rzeczywistą nie więcej niż $2n$ razy.

TAK Jeśli x_0 jest wielokrotnym pierwiastkiem W, to jest także pierwiastkiem W'.

TAK Istnieje nieskończenie wiele wartości, które wielomian W osiąga dokładnie dwa razy.

10. Liczba $\sqrt{1 + 2020\sqrt{1 + 2019\sqrt{1 + 2018\sqrt{1 + 2017 \cdot 2015}}}}$

NIE jest liczbą niewymierną,

NIE jest > 2020,

TAK jest < 2021.

11. W trójkącie $\triangle ABC$ zachodzą równości $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ i $|AB| = 2$. Czworokąt $KLMN$ spełnia warunki $L \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$, $N \in \overline{CA}$ i $K \in \overline{AB}$. Wówczas

TAK czworokąt $KLMN$ może być kwadratem,

NIE pole czworokąta $KLMN$ może być większe niż 1,

TAK jeżeli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to $|KM| = \frac{1}{13}(8\sqrt{6} - 6\sqrt{2})$.

12. Dane są liczby $A = \dfrac{2020!}{202! \cdot 201! \cdot 200!}$ i $B = \dfrac{2020!}{202! + 201! + 200!}$. Wówczas

TAK liczba A jest liczbą całkowitą,

TAK liczba B jest liczbą całkowitą,

TAK iloraz $\frac{B}{A}$ jest liczbą całkowitą.

13. Liczbę rzeczywistą x nazwiemy *dobrą*, gdy liczby $\dfrac{x+2}{x+1}$ i $\dfrac{x+3}{x+2}$ są liczbami całkowitymi. Wówczas

TAK zbiór liczb *dobrych* jest niepusty,

NIE istnieje co najmniej jedna niewymierna liczba *dobra*,

NIE istnieją dokładnie dwie liczby *dobre*.

14. Równanie

TAK $\sin x = \operatorname{ctg} x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych,

TAK $\cos x = \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych,

NIE $\sin x + \cos x = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych.

15. Dla danego zbioru skończonego X, przez $L_k(X)$ oznaczamy liczbę jego podzbiorów k-elementowych. Wówczas

NIE nie istnieje taki zbiór X, dla którego $L_5(X) > L_6(X)$,

NIE jeżeli $L_5(X) > L_6(X)$, to w zbiorze X istnieje podzbiór 10-elementowy,

TAK jeżeli $L_5(X) > L_6(X)$, to istnieje taki podzbiór $Y \subseteq X$, że $L_5(Y) < L_4(Y)$.

16. Nieskończony ciąg liczbowy $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ nazywa się *ciągiem wypukłym*, gdy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $2a_{k+1} \leqslant a_k + a_{k+2}$. Wówczas

TAK ciąg (h_n) dany przez $h_n = \frac{1}{n}$ jest *ciągiem wypukłym*,

TAK każdy ciąg arytmetyczny jest *ciągiem wypukłym*,

NIE jeżeli ciąg (a_n) jest *ciągiem wypukłym*, to ciąg (b_n) dany przez $b_n = a_n^2$ również jest *ciągiem wypukłym*.

17. Czy istnieje

TAK ciąg arytmetyczny sześciowyrazowy, w którym wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?

NIE ciąg arytmetyczny trzywyrazowy postaci $p, p+2^k, p+2^{k+1}$, gdzie $p > 3$, $k \in \mathbb{N}$ i wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?

TAK ciąg arytmetyczny trzywyrazowy postaci n^2, m^2, k^2, gdzie $n, m, k \in \mathbb{N}$, w których wyrazy są parami względnie pierwsze?

18. Czy istnieje liczba naturalna

NIE dwucyfrowa, która jest równa sumie kwadratów swoich cyfr?

TAK trzycyfrowa, która jest równa sumie sześcianów swoich cyfr?

TAK czterocyfrowa, która jest równa sumie czwartych potęg swoich cyfr?

19. Czy istnieje niestały wielomian P o współczynnikach rzeczywistych taki, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

TAK $P(0) = 0$ i $P(x+1) = P(x) + x$?

NIE $P(x+1) = P(x)$?

TAK $P(2x) = 2P(x)$?

20. Rzucamy wielokrotnie dwiema sześciennymi kostkami do gry. W każdym rzucie sumujemy liczbę oczek na obu kostkach.

TAK Prawdopodobieństwo, że w każdym z pięciu początkowych rzutów wypadnie suma 7 jest mniejsze od $\frac{1}{2021}$.

TAK Prawdopodobieństwo, że w pięciu początkowych rzutach suma oczek podzielnych przez 3 wypadnie co najmniej cztery razy jest mniejsza od $\frac{1}{22}$.

NIE Prawdopodobieństwo, że suma 8 wypadnie przed sumą 7 jest większe od $\frac{1}{2}$.

II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0; 10]$ (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wykaż, że każdy wielomian nieujemny (tzn. taki, że $W(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$) o współczynnikach rzeczywistych da się przedstawić jako suma dwóch kwadratów wielomianów rzeczywistych.

2. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Niech $\overline{AD}$ będzie średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. Oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości trójkąta $\triangle ABC$. Wykazać, że prosta l_{BC} dzieli odcinek $\overline{HD}$ na dwie równe części.