Wykaż, że każdy wielomian nieujemny (tzn. taki, że $W(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$) o współczynnikach rzeczywistych da się przedstawić jako suma dwóch kwadratów wielomianów rzeczywistych.

Rozwiązanie

Wiadomo, że dowolny wielomian W rozkłada się na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Ponadto, jeśli wielomian W jest nieujemny, to czynniki liniowe muszą występować w parzystej potędze, a nierozkładalne czynniki kwadratowe muszą być postaci $(x-p)^2+q$ przy pewnych $p, q \in \mathbb{R}, q > 0$. W szczególności W ma stopień parzysty $2n, n \in \mathbb{N}$ oraz można go zapisać za pomocą iloczynu liczby nieujemnej i czynników postaci $(x-p)^2+q$ przy $p, q \in \mathbb{R}, q \geqslant 0$ (*).

Przeprowadźmy indukcję względem n. Dla $n = 0$ każdy wielomian nieujemny jest postaci $W(x) = q, q \geqslant 0$. Wtedy $W(x)$ rozkłada się w sposób trywialny na sumę kwadratów dwóch wielomianów: $W(x) = (\sqrt{q})^2 + 0^2$. Załóżmy teraz, że dla pewnego $n \geqslant 0$ dowolny wielomian W stopnia $2n$ rozkłada się na sumę kwadratów pewnych wielomianów P i Q, tj. $W(x) = P^2(x)+Q^2(x)$. Wykażemy, że dowolny wielomian V stopnia $2n+2$ również rozkłada się na sumę kwadratów. Istotnie, z (*) wynika, że $V(x) = [(x-p)^2+q] \cdot W(x)$, przy pewnych $p, q \in \mathbb{R}, q \geqslant 0$ oraz nieujemnym wielomianie $W(x)$ stopnia $2n$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym $W(x) = P^2(x) + Q^2(x)$, dla pewnych wielomianów P, Q. Stąd

$$V(x) = [(x-p)^2 + q] \cdot [P^2(x) + Q^2(x)],$$

co można zapisać w postaci

$$V(x) = [(x-p)P(x) - \sqrt{q}Q(x)]^2 + [(x-p)Q(x) + \sqrt{q}P(x)]^2.$$

Zatem na mocy ZIM dowolny wielomian nieujemny można zapisać jako suma kwadratów dwóch wielomianów, CND.