LXII Międzyszkolne Zawody Matematyczne

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy.

Punktacja:
1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, −1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:
(1) $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
(2) $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0}$ – liczba naturalna n taka, że a_0 to cyfra jedności liczby n, a_1 to cyfra dziesiątek liczby n itd.

1. Ciąg arytmetyczny (a_n), którego pierwszy wyraz a_1 jest liczbą dodatnią, spełnia warunek $6a_8 = 10a_{13}$. Niech ponadto s_n oznacza sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów tego ciągu. Wówczas

   NIE różnica r tego ciągu jest liczbą dodatnią;

   TAK $21a_{20} = a_{10}$;

   NIE dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $s_n \leqslant s_{21}$.

2. Ciąg (a_n) dany jest przez warunki początkowe $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i równość rekurencyjną $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ dla $n \geqslant 0$. Wówczas

   NIE $a_{100} = -1$;

   TAK $\sum_{k=0}^{100} a_k = 1$;

   TAK $\sum_{k=0}^{100} a_k^2 = 203$.

3. Dana jest liczba pierwsza nieparzysta p. Wówczas

   TAK istnieje taka liczba naturalna n, że $\sqrt{n+p} + \sqrt{n}$ jest liczbą naturalną;

   TAK istnieją 2022 takie liczby wymierne u, że $\sqrt{u+p} + \sqrt{u}$ jest liczbą wymierną;

   NIE istnieje taka liczba naturalna n, że $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ jest liczbą naturalną.

4. Punkt X leży na wysokości CC' trójkąta $\triangle ABC$. Kąty przy wierzchołkach A, B i C oznaczamy odpowiednio przez α, β i γ. Wówczas

   TAK $AX \perp BC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $BX \perp AC$;

   TAK $|\measuredangle AXB| = \alpha + \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = H$, gdzie H jest ortocentrum $\triangle ABC$;

   TAK jeżeli $|CX| \operatorname{tg} \gamma = |AB|$, to $X = H$, gdzie H jest ortocentrum $\triangle ABC$.

5. Wszystkie nieujemne całkowite potęgi liczby 3 oraz ich skończone sumy zostały ułożone w ciąg w kolejności niemalejącej. Otrzymano w ten sposób ciąg $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 10$, $a_6 = 12$, $a_7 = 13$, $a_8 = 27$, ... Wówczas

TAK ciąg ten jest rosnący;

NIE w ciągu tym występuje liczba 2022;

NIE $a_{2022} = 88461$.

6. Dana jest liczba 187. Wówczas

NIE liczba 187 jest liczbą pierwszą;

NIE istnieje 6 liczb naturalnych dla których 187 jest największym dzielnikiem właściwym (dzielnik właściwy liczby to dzielnik liczby, mniejszy od niej samej);

TAK istnieją co najmniej 52 liczby naturalne mniejsze od 10^4, dla których 187 jest dzielnikiem właściwym.

7. Najkrótszy oraz najdłuższy bok pewnego trójkąta mają odpowiednio długości 1 i 3. Wówczas

NIE pole tego trójkąta może być każdą liczbą z przedziału $\left(0; \frac{3}{2}\right)$;

NIE maksymalny możliwy promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $\frac{3\sqrt{13}}{49}$;

NIE maksymalny możliwy promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest mniejszy niż 2022.

8. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniających warunek $f(x) = f(x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

NIE zbiór $\mathcal{F}$ zawiera wielomian stopnia większego od 1;

NIE zbiór $\mathcal{F}$ zawiera tylko funkcje nierosnące lub niemalejące;

TAK zbiór $\mathcal{F}$ zawiera pewną funkcję o trzech wartościach.

9. Liczbę naturalną $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ nazywamy palindromem, gdy $n = \overline{a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k}$. Dla przykładu palindromami są liczby 7, 33, 494. Wówczas

NIE jeśli kwadrat liczby $n > 1$ jest palindromem, to $11|n$;

TAK istnieją liczby pierwsze > 20, które są palindromami;

TAK istnieje nieskończenie wiele sześcianów (liczb naturalnych), które są palindromami.

10. Niech A będzie zbiorem takich punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych dodatnich, że z odcinków o długościach $x, y, 1$ można zbudować trójkąt, a z odcinków o długościach $x, y, 2$ nie można zbudować trójkąta. Wówczas

NIE istnieją dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do A;

TAK zbiór A jest figurą geometryczną o polu 1;

NIE zbiór A ma środek symetrii.

11. Oznaczmy przez $J(b,k)$ liczbę $1+b+...+b^{k-1}$, gdzie $k,b\in\mathbb{N}$. Wówczas

NIE istnieje nieskończenie wiele $k>1$ takich, że $J(10,k)$ jest kwadratem liczby naturalnej;

NIE istnieje nieskończenie wiele takich b, że liczba $J(b,3)$ jest kwadratem liczby naturalnej;

NIE jeśli b jest liczbą parzystą i $J(b,k)$ jest kwadratem liczby naturalnej, to $8|b$.

12. Dla liczby naturalnej $n=\overline{a_k a_{k-1}...a_0}$ niech $f(n)$ oznacza liczbę $\overline{a_{k-1}...a_1 a_0 a_k}+1$. Dla przykładu: $f(4)=5$, $f(24)=43$, $f(807)=79$. Dalej niech $u_1\in\mathbb{N}$ i $u_{n+1}=f(u_n)$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wówczas niezależnie od wyboru u_1

NIE ciąg (u_n) jest okresowy;

TAK ciąg (u_n) jest ograniczony;

NIE $\mathrm{NWD}(u_n,u_{n+1})\leqslant 2$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

13. Dane są funkcje $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=x^2+cx+d, a,b,c,d\in\mathbb{R}$, przy czym wyróżnik funkcji f jest dodatni, a miejsca zerowe funkcji g są kwadratami miejsc zerowych funkcji f. Wówczas

TAK wierzchołek paraboli wyznaczonej przez funkcję g ma dodatnią odciętą;

TAK $d=b^2$;

NIE $c<a$.

14. W ostrosłupie $ABCD$ kąty $\measuredangle BAD$, $\measuredangle CAD$, $\measuredangle BAC$ są proste. Wówczas

TAK $P_{BCD}^2=P_{ACD}^2+P_{ABD}^2+P_{ABC}^2$;

NIE środek kuli opisanej na $ABCD$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD;

NIE $|AB|\cdot|AC|\cdot|AD|=h\cdot P_{BCD}$, gdzie h to wysokość ostrosłupa wychodząca z wierzchołka A.

15. Liczby $1,2,3,4,5,6,7,8$ ustawiamy losowo w ciąg. Rozważmy zdarzenia: A – suma czterech początkowych wyrazów otrzymanego ciągu jest mniejsza od sumy czterech pozostałych, B – suma czterech początkowych wyrazów otrzymanego ciągu jest większa od czterech pozostałych. Wobec tego

TAK $P(A)=P(B)$;

NIE $P(A)=\frac{1}{2}$;

TAK $P(A)<\frac{1}{2}$.

16. Niech T będzie zbiorem wszystkich trapezów równoramiennych, których przekątne tworzą z podstawami kąt α i mają długość d. Wynika stąd, że

NIE obwody wszystkich trapezów należących do zbioru T są równe;

TAK pola wszystkich trapezów należących do zbioru T są równe;

TAK suma podstaw każdego trapezu należącego do zbioru T jest równa $2d\cos\alpha$.

17. Istnieje taka liczba rzeczywista m, że zbiór rozwiązań nierówności $|x|+m<\frac{1}{|x|}$

NIE jest zbiorem pustym;

NIE jest równy $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

TAK jest zawarty w przedziale $\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$.

18. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub niebieski. Wówczas niezależnie od pokolorowania

TAK istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1;

TAK istnieją trzy punkty tego samego koloru będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

TAK istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru;

19. Ze zbioru liczb $1,2,\ldots,2022$ wybieramy 1012 liczb. Wówczas

TAK różnica pewnych dwóch z nich wynosi 1;

TAK pewne dwie z nich są względnie pierwsze;

TAK są takie dwie, ze jedna dzieli się przez drugą.

20. Jeśli $\sin x-\cos x=p$ to

TAK $\sin 2x=1-p^2$;

NIE $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1+2p-p^4}{2}$;

NIE $\sin^4 x-\cos^4 x=p\sqrt{2-p^2}$.

II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału [0; 10] (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą równości:

$$|AB|=|BC|=|CD|,\quad |AE|=|EB|=|BD|,\quad |AC|=|CE|=|ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

Rozwiązanie Zadania 1

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$x = |AB|, y = |AE|, z = |AC|, \varphi = |\angle BAC|, \psi = |\angle CAE|.$$

Zachodzą następujące równości:

$$\frac{x}{2y} = \frac{AG}{AE} = \cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \frac{AH}{HB}\cdot\frac{AI}{AC} - \frac{CI}{AC}\cdot\frac{HB}{AB} = \frac{z}{2x}\cdot\frac{y}{2z} - \sqrt{1-\frac{z^2}{4x^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{4z^2}}.$$

Po przekształceniach algebraicznych równość skrajnych wyrażeń równoważna jest z równością

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 5. \tag{1}$$

Analogicznie, rozważając kąty $\angle ADC$ i $\angle ADE$, otrzymujemy

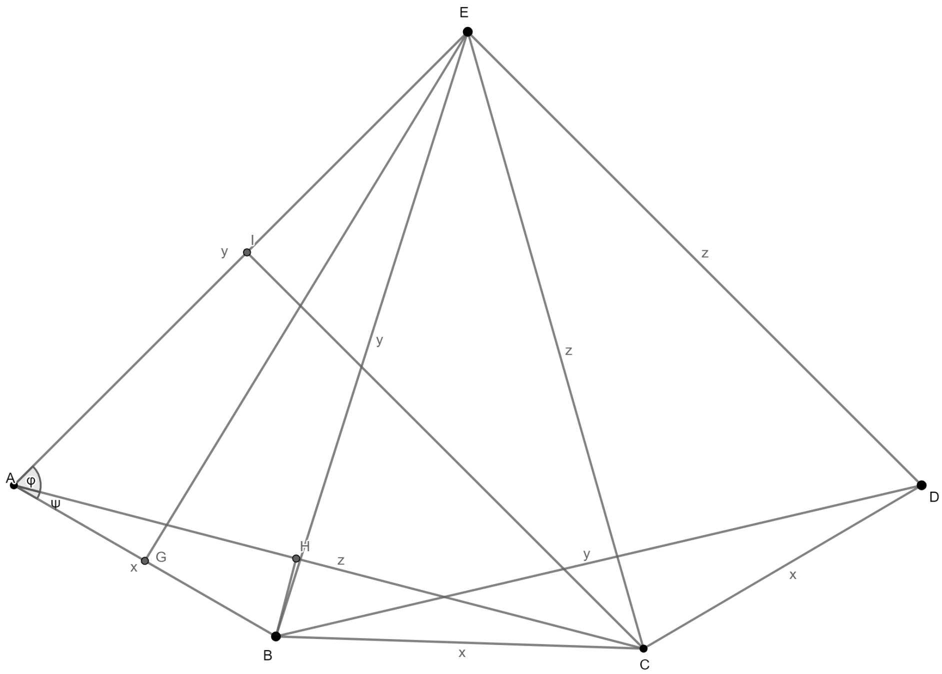
$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 5. \tag{2}$$

Odejmując (1) i (2) stronami i porządkując, dostajemy

$$\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x^2}\right) = 0.$$

Zatem $x = y, y = z$ lub $z = x$. Jeżeli $x = y$, to punkty B i E leżą na symetralnej odcinka CD i wtedy pięciokąt $ABCDE$ nie jest wypukły. Podobnie gdy $z = x$. Wobec tego jedyną możliwością jest $y = z$. Wówczas trójkąty ACE i BDE są równoboczne, zaś trójkąty AEB, BEC i CED - równoramienne i z cechy BBB, przystające. Z tego wynika, że $|\angle AEB| = |\angle BEC| = |\angle CED| = 30°$, a stąd łatwo widać, że

$$\angle A = 75°, \angle B = 150°, \angle C = 150°, \angle D = 75°, \angle E = 90°.$$



2. W szkolnym turnieju szachowym występuje dwójka uczestników z klasy pierwszej oraz pewna ilość uczestników z klasy drugiej. Wszyscy gracze odbyli dokładnie jeden pojedynek ze wszystkimi pozostałymi uczestnikami turnieju. Wiadomo, że dwaj pierwszoklasiści łącznie zdobyli 8 punktów, a każdy z drugoklasistów uzyskał taką samą ilość punktów. Ilu drugoklasistów uczestniczyło w turnieju? (za wygraną jest przyznawany 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$ punktu, a za przegraną 0 punktów).

Rozwiązanie Zadania 2

Oznaczmy przez n liczbę uczestników w klasie drugiej oraz przez m liczbę punktów uzyskanych przez każdego z nich (z założenia każdy uzyskał taką samą ilość punktów). Stąd łączna ilość zdobytych w turnieju punktów to $nm+8$. Wszystkich uczestników jest $n+2$, więc zostanie rozegranych $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ zwycięskich meczów, a tym samym łącznie zawodnicy otrzymają tyle punktów. Stąd

$$nm+8=\frac{1}{2}(n+2)(n+1),$$

Skąd po przekształceniu mamy:

$$n(n+3-2m)=14.$$

Ponieważ $n, 2m \in \mathbb{Z}$ to $n=1$, $n=2$, $n=7$ lub $n=14$. Jeśli $n=1$ lub $n=2$ to dwóch pierwszoklasistów nie zdoła uzyskać 8 punktów. Wobec tego $n=7$ lub $n=14$.