IMIĘ I NAZWISKO:......................................................................................................................................

# LXV Międzyszkolne Zawody Matematyczne

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

## I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

*Punktacja:*
jeden punkt za każdą poprawną odpowiedź, zero punktów za brak odpowiedzi, minus jeden punkt za odpowiedź niepoprawną i jeden punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

*Oznaczenia*:
(1) $\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych; zakładamy, że 0 *nie jest* liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
(2) $\lfloor a \rfloor$ — podłoga liczby $a$, tzn. największa liczba całkowita mniejsza, bądź równa $a$, przykładowo: $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$
(3) $\{a\}$ — część ułamkowa liczby $a$, tzn. $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$, przykładowo: $\{\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}$
(4) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ — symbol Newtona.

1. Prawdą jest, że:

   (a) ...*N*... istnieje potęga liczby 3 o wykładniku naturalnym, która w systemie dziesiętnym jest zakończona sekwencją 012;

   (b) ...*T*... istnieje potęga liczby 3 o wykładniku naturalnym, która w systemie dziesiętnym jest zakończona sekwencją 561;

   (c) ...*N*... istnieje potęga liczby 5 o wykładniku naturalnym, która w systemie dziesiętnym jest zakończona sekwencją 825.

2. Zachodzą nierówności:

   (a) ...*T*... $2^{3^{2^3}} > 3^{2^{3^2}}$;

   (b) ...*T*... $18^{15} > 63^{10}$;

   (c) ...*T*... $3^{100} - 2^{150} > 3^{50} + 2^{75}$.

3. Funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

   (a) ...*N*... jest rosnąca;

   (b) ...*T*... osiąga wartości nie mniejsze od 2;

   (c) ...*T*... ma wykres posiadający oś symetrii.

4. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - (2m+6)x + 9 - m^2$, mająca dwa różne miejsca zerowe $x_1$, $x_2$. Wówczas

   (a) ...*N*... $x_1, x_2 > 0$ dla dokładnie czterech wartości całkowitych $m$;

   (b) ...*T*... $(m-3)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) > 0$ dla $m > 3$;

   (c) ...*N*... $x_1^2 + x_2^2$ osiąga najmniejszą wartość dla $m = -2$.

5. Dla liczby naturalnej $n$ przez $\sigma(n)$ oznaczmy sumę dzielników naturalnych liczby $n$. Dla przykładu $\sigma(10) = 1+2+5+10 = 18$.

   (a) ...$N$... Liczba $\sigma(1024)$ jest parzysta.

   (b) ...$N$... Istnieje liczba naturalna $n$, która ma dokładnie cztery dzielniki naturalne oraz $\sigma(n)$ jest liczbą pierwszą.

   (c) ...$N$... Suma odwrotności dzielników naturalnych liczby 2025 jest mniejsza od $\frac{\sigma(2025)}{2025}$.

6. Rozważmy 2025 parami różnych punktów na płaszczyźnie, z których dokładnie 1025 leży na jednej prostej i nie istnieje inna prosta, na której leżałyby 3 z tych punktów. Jeżeli teraz poprowadzimy przez każde dwa punkty prostą, to dostaniemy $k$ różnych prostych, gdzie $k$ wynosi:

   (a) ...$N$... $\binom{2025}{2}$;

   (b) ...$T$... $\binom{2025}{2} - \binom{1025}{2} + 1$;

   (c) ...$T$... $\binom{1000}{2} + 10^3 \cdot 1025 + 1$.

7. Liczbę naturalną $n$ nazywamy doskonałą, gdy suma jej dzielników naturalnych wynosi $2 \cdot n$. Przykładowo 6 jest liczbą doskonałą, bo $1+2+3+6 = 2 \cdot 6$.

   (a) ...$N$... Liczba 30 jest doskonała.

   (b) ...$T$... Istnieje dokładnie jedna liczba doskonała postaci $p \cdot q$ dla różnych liczb pierwszych.

   (c) ...$N$... Istnieją przynajmniej 3 liczby doskonałe postaci $3^n \cdot p$ dla liczby naturalnej $n$ i liczby pierwszej $p$. .

8. Równanie:

   (a) ...$T$... $x^2 - y^2 = 20$ ma w liczbach naturalnych dokładnie jedno rozwiązanie (tzn. istnieje dokładnie jedna para liczb naturalnych $(x, y)$, która spełnia to równanie);

   (b) ...$N$... $3x^2 + 1 = 5y^2$ ma w liczbach naturalnych dokładnie jedno rozwiązanie;

   (c) ...$T$... $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$ ma w liczbach naturalnych dokładnie jedno rozwiązanie.

9. Dany jest trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$. Niech $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ będą spodkami wysokości. Wynika z tego, że:

   (a) ...$T$... czworokąt $BCB'C'$ można wpisać w okrąg;

   (b) ...$N$... trójkąt $\triangle A'B'C'$ jest podobny do trójkąta $\triangle ABC$;

   (c) ...$T$... $\sphericalangle B'C'C = \sphericalangle A'C'C$.

10. Niech $f(n,k) = n^k, g(n,k) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$. Wówczas:

   (a) ...$T$... $f\big(g(9,1),2\big) = 2025$;

   (b) ...$N$... $g\big(f(3,2), g(2,1)\big) = 2024$;

   (c) ...$T$... dla $n \geqslant 2025$ mamy $g(2n+1,1) - 2 \cdot g(n,1) = f(n+1,2)$.

IMIĘ I NAZWISKO:.......................................................................................................................................

11. Z wierzchołków trójkąta $\triangle ABC$, gdzie $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$, narysowano okręgi o promieniach odpowiednio $r_A, r_B, r_C$ w taki sposób, że okręgi te są parami styczne, niech $D$ oznacza punkt styczności okręgów o promieniach $r_B$ i $r_C$, $E$ – punkt styczności okręgów o promieniach $r_C$ i $r_A$, zaś $F$ – punkt styczności okręgów o promieniach $r_A$ i $r_B$. Wynika z tego, że:

    (a) ...$T$... $r_A = \dfrac{b+c-a}{2}$;

    (b) ...$T$... odcinki $AD, BE, CF$ przecinają się w jednym punkcie;

    (c) ...$N$... $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ACB$.

12. Funkcje $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ spełniają następujące warunki:

$$f_1(x) = x,\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

    Wówczas:

    (a) ...$N$... $f_{2025}(2025) = 2025$;

    (b) ...$N$... istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że ciąg $f_1(x), f_2(x), \ldots$ jest stały;

    (c) ...$N$... $f_1(\sqrt{2}) \cdot f_2(\sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot f_{2025}(\sqrt{2}) = 1$.

13. Prawdą jest, że to

    (a) ...$N$... $\log_2 2025 < 10$;

    (b) ...$T$... $\log_{2024} 2025 + \log_{2025} 2024 \geqslant 2$;

    (c) ...$N$... $\log_2 2025 - \log_2 2024 < \dfrac{1}{2024}$.

14. Dany jest równoległobok $ABCD$ o polu 24. Punkt $M$ jest środkiem boku $AD$. Odcinki $AC$ i $BM$ przecinają się w punkcie $S$. Wówczas

    (a) ...$T$... $P_{\triangle AMB} = 6$;

    (b) ...$T$... $\dfrac{|AS|}{|CS|} = \dfrac{1}{2}$;

    (c) ...$N$... $P_{\triangle CBS} = (P_{\triangle AMS})^2$.

15. Rzucamy dwoma sześciennymi kostkami do gry. Wtedy prawdopodobieństwo tego, że suma oczek na obu kostkach jest

    (a) ...$T$... parzysta, wynosi $\dfrac{1}{2}$;

    (b) ...$N$... większa od 7, wynosi $\dfrac{1}{2}$;

    (c) ...$T$... parzysta i większa od 7, wynosi $\dfrac{1}{4}$.

16. Każdy punkt na prostej został pomalowany na czerwono lub niebiesko w taki sposób, że każdy odcinek o długości 2 z tej prostej ma końce o różnych kolorach. Istnieje wówczas na tej prostej odcinek o końcach różnych kolorów o długości

    (a) ...$N$... 4;

    (b) ...$T$... 5;

    (c) ...$T$... 6.

17. Dany jest trapez $ABCD$, w którym odcinek $AD$ jest równoległy do odcinka $BC$ oraz $|AB| = |BC|$. Punkty $E$ i $F$ są środkami odpowiednio odcinków $BC$ i $AD$. Przypuśćmy, że dwusieczna kąta $\sphericalangle ABC$ zawiera punkt $F$. Wówczas

   (a) ...*T*... czworokąt $AFCB$ jest rombem;

   (b) ...*T*... jeśli $G$ to punkt przecięcia prostych zawierających boki $AB$ i $CD$ to trójkąt $\triangle GAD$ jest równoramienny;

   (c) ...*T*... $\dfrac{|BD|}{|EF|} = 2$.

18. Niech $x$ będzie liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $\{x^2\} = \{x\}^2$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby $x$. Wówczas

   (a) ...*T*... liczba $x$ spełnia zawsze warunek $\{x^2\} = \{2\lfloor x\rfloor\{x\} + \{x^2\}\}$;

   (b) ...*N*... liczba $\lfloor x\rfloor\{x\}$ może być dowolną liczbą wymierną;

   (c) ...*N*... jedyne liczby spełniające to równanie należą do przedziału $[0,1]$ lub są liczbami całkowitymi.

19. Liczby $a, b, c$ są długościami boków pewnego trójkąta. Wtedy

   (a) ...*N*... liczby $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ są długościami pewnego trójkąta,

   (b) ...*T*... liczby $a+b$, $b+c$, $c+a$ są długościami pewnego trójkąta,

   (c) ...*T*... liczby $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ są długościami pewnego trójkąta.

20. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym wszystkie kąty przy wierzchołku $A$ są proste. Wówczas:

   (a) ...*N*... trójkąt $\triangle BCD$ może być prostokątny;

   (b) ...*T*... rzut prostokątny punktu $A$ na płaszczyznę $BCD$ jest punktem przecięcia wysokości (ortocentrum) trójkąta $\triangle BCD$;

   (c) ...*N*... środek sfery opisanej na $ABCD$ leży na płaszczyźnie $BCD$.

## II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału [0; 10] (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Niech $a$ będzie liczbą naturalną względnie pierwszą z liczbą 10. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele potęg liczby $a$ o wykładniku naturalnym, które w systemie dziesiętnym kończą się sekwencją $\underbrace{00\ldots01}_{\text{2025 cyfr}}$ (2024 zera i jedna jedynka).

2. Wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ leży taki punkt $P$, że

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi.$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma},$$

gdzie $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$.

## Rozwiązanie zadania 1

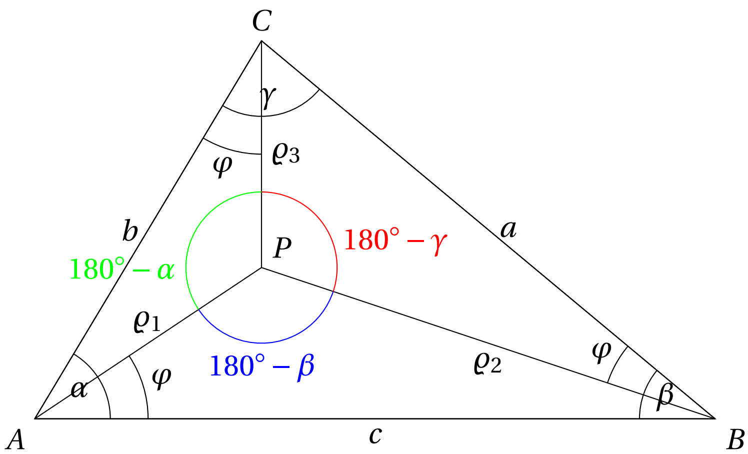
Odnotujmy, że potęga $a^k$ kończy się sekwencją $\underbrace{00\ldots01}_{2025\text{ cyfr}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $10^{2025}|a^k-1$. Rozważmy reszty z dzielenia liczb $a^k$ przez $10^{2025}$. Ponieważ reszt jest skończenie wiele, a potęg nieskończenie wiele, więc istnieje nieskończenie wiele potęg liczby $a$, które mają tę samą resztę z dzielenia przez $10^{2025}$. Niech $k$ będzie najmniejszą taką potęgą, a $n$ dowolną inną. Wtedy $n > k$ i mamy $10^{2025}|a^n - a^k$. Stąd $10^{2025}|a^k(a^{n-k} - 1)$. Ponieważ $NWD(a,10) = 1$, to $10^{2025}|a^{n-k} - 1$. Zatem $a^{n-k}$ jest potęgą spełniającą warunki zadania.

## Rozwiązanie zadania 2

Żądany związek wysnujemy z równości

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle APB} + P_{\triangle BPC} + P_{\triangle CPA} \tag{1}$$

wyrażając pola trójkątów w zależności od kątów wewnętrznych $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trójkąta $\triangle ABC$, kąta $\varphi$ i od promienia $R$ okręgu opisanego na $\triangle ABC$.




1. Wiadomo, że
$$P_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \tag{2}$$

2. Zauważmy, że
$$\sphericalangle APB = 180^\circ - \beta,\ \sphericalangle BPC = 180^\circ - \gamma,\ \sphericalangle CPA = 180^\circ - \alpha.$$
Przykładowo
$$\sphericalangle APB = 180^\circ - \varphi - \sphericalangle PBA = 180^\circ - \varphi - (\beta - \varphi) = 180^\circ - \beta.$$
Oznaczmy $|AP| = \varrho_1$, $|BP| = \varrho_2$, $|CP| = \varrho_3$. Odcinki te możemy obliczyć stosując do trójkątów $\triangle APC$, $\triangle APB$, $\triangle BPC$ twierdzenie sinusów. Otrzymujemy
$$\varrho_1 = \frac{b}{\sin(180^\circ - \alpha)} \sin\varphi = \frac{2R\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\varphi$$
i podobnie
$$\varrho_2 = \frac{2R\sin\gamma}{\sin\beta} \sin\varphi, \quad \varrho_3 = \frac{2R\sin\alpha}{\sin\gamma} \sin\varphi.$$
Wobec tego

$$P_{\triangle APB} = \frac{1}{2}\varrho_1 \cdot c \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sin\beta}{\sin\alpha}\sin\varphi \cdot 2R\sin\gamma\sin\varphi,$$

skąd

$$P_{\triangle APB} = 2R^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}\sin^2\varphi. \tag{3}$$

Analogicznie

$$P_{\triangle BPC} = 2R^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}\sin^2\varphi, \tag{4}$$

$$P_{\triangle CPA} = 2R^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\sin^2\varphi. \tag{5}$$

Podstawiając do (1) wyrażenia (2), (3), (4), (5) otrzymujemy

$$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2R^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}\sin^2\varphi + 2R^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}\sin^2\varphi + 2R^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\sin^2\varphi$$

i dzieląc obie strony równości przez $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin^2\varphi$, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma},$$

co było do udowodnienia.