

LXVI Międzyszkolne Zawody Matematyczne

Wojciech Bondarewicz, Dawid Kędzierski, Arnold Kowalski, Lucjan Szymaszkiewicz

Draft: 22 marca 2026

Międzyszkolne Zawody Matematyczne trwają 180 minut. W czasie ich trwania zawodnicy nie mogą korzystać z urządzeń elektronicznych. Zawody składają się z testu oraz zadań otwartych.

I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja:

jeden punkt za każdą poprawną odpowiedź, zero punktów za brak odpowiedzi, minus jeden punkt za odpowiedź niepoprawną i jeden punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:

- (1) \mathbb{N} — zbiór liczb naturalnych; zakładamy, że 0 *nie jest* liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- (2) \mathbb{Z} — zbiór liczb całkowitych
- (3) $n!$ — n silnia, tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ dla $n \geq 1$ oraz $0! = 1$

1. Na ulicy Matematycznej znajdują się cztery domy ponumerowane od lewej do prawej liczbami od 1 do 4. W domach tych mieszkają osoby \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} i \mathcal{D} . Każda z nich ma inne zwierzę spośród α , β , γ i δ . Wiadomo, że

- (i) α mieszka w pierwszym domu;
- (ii) zwierzę β i osoba \mathcal{A} mieszkają w dwóch sąsiednich domach;
- (iii) zwierzę γ mieszka w którymś z domów po lewej stronie od domu osoby \mathcal{B} ;
- (iv) \mathcal{C} mieszka w czwartym domu.

Wówczas:

- (a) ...**TAK**... γ nie mieszka w dwóch ostatnich domach;
- (b) ...**TAK**... β jest zwierzęciem \mathcal{B} ;
- (c) ...**TAK**... \mathcal{D} i δ mieszkają w dwóch skrajnych domach.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... γ nie mieszka w dwóch ostatnich domach;

Istotnie z (i) i (iv) mamy, że

dom	I	II	III	IV
osoba				\mathcal{C}
zwierzę	α			

Z (iii) wynika, że jedyną możliwością dla \mathcal{B} i γ , to

dom	I	II	III	IV
osoba			\mathcal{B}	\mathcal{C}
zwierzę	α	γ		

co pokazuje prawdziwość (a).

...TAK... β jest zwierzęciem \mathcal{B}

Kontynuujemy rozumowanie z poprzedniej części. Z (ii) wynika, że jedyną możliwością dla β i \mathcal{A} jest

dom	I	II	III	IV
osoba		\mathcal{A}	\mathcal{B}	\mathcal{C}
zwierzę	α	γ	β	

co pokazuje prawdziwość (b).

...TAK... \mathcal{D} i δ mieszkają w dwóch skrajnych domach.

Istotnie z poprzedniej części możemy uzupełnić tabelkę tylko na jeden sposób

dom	I	II	III	IV
osoba	\mathcal{D}	\mathcal{A}	\mathcal{B}	\mathcal{C}
zwierzę	α	γ	β	δ

co pokazuje prawdziwość (c).

2. Funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $g(x) = \min\{|x - 2026|, |x + 2026|\}$. Wówczas:

- ...TAK...** istnieją dokładnie dwie wartości x , dla których $g(x) = 0$,
- ...TAK...** funkcja g jest funkcją parzystą,
- ...NIE...** równanie $g(x) = \frac{x}{2}$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

Wyjaśnienie:

...TAK... istnieją dokładnie dwie wartości x , dla których $g(x) = 0$,

$g(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - 2026| = 0$ lub $|x + 2026| = 0$, ponieważ minimum dwóch liczb nieujemnych jest zerem tylko wtedy, gdy jedna z nich jest zerem. Stąd $x = 2026$ lub $x = -2026$. Żadne inne x nie spełniają tego warunku. Zatem istnieją dokładnie dwa takie x .

...TAK... funkcja g jest funkcją parzystą,

Sprawdzamy warunek parzystości:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \min\{|-x - 2026|, |-x + 2026|\} = \min\{|-(x + 2026)|, |-(x - 2026)|\} \\ &= \min\{|x + 2026|, |x - 2026|\} = g(x). \end{aligned}$$

Zatem g jest parzysta.

...NIE... równanie $g(x) = \frac{x}{2}$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

Dla $x < 0$ mamy $\frac{x}{2} < 0$, podczas gdy $g(x) \geq 0$, więc równanie nie może być spełnione.

Dla $x \geq 0$ mamy $g(x) = |x - 2026|$. Rozwiązujemy:

- Dla $0 \leq x \leq 2026$: $|x - 2026| = 2026 - x$, stąd $2026 - x = \frac{x}{2}$ daje $2026 = \frac{3}{2}x$, czyli $x = \frac{4052}{3} = 1350\frac{2}{3}$ – mieści się w przedziale.

- Dla $x \geq 2026$: $|x - 2026| = x - 2026$, stąd $x - 2026 = \frac{x}{2}$ daje $\frac{x}{2} = 2026$, czyli $x = 4052$ – również spełnia.

Otrzymujemy dwa rozwiązania, a nie trzy.

3. O liczbach dodatnich x, y, z wiadomo, że $x(y - z) = 1$ i $2x = y + z$. Wynika stąd, że

- (a) ...**TAK**... $y > z$;
- (b) ...**TAK**... $x > z$;
- (c) ...**TAK**... $y > x$.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... $y > z$;

Z pierwszego równania, ponieważ $x > 0$, mamy $y - z = \frac{1}{x} > 0$, zatem $y > z$. Stąd stwierdzenie (a) jest prawdziwe.

...**TAK**... $x > z$;

...**TAK**... $y > x$.

Z układu równań:

$$\begin{cases} y - z = \frac{1}{x} \\ y + z = 2x \end{cases}$$

Dodając i odejmując otrzymujemy:

$$y = x + \frac{1}{2x}, \quad z = x - \frac{1}{2x}.$$

Z powyższych wzorów:

$$x > x - \frac{1}{2x} = z, \quad \text{bo } \frac{1}{2x} > 0,$$

$$y = x + \frac{1}{2x} > x, \quad \text{bo } \frac{1}{2x} > 0.$$

Zatem stwierdzenia (b) i (c) również są prawdziwe.

4. Niech $\alpha = 18^\circ$. Wtedy:

- (a) ...**TAK**... $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$;
- (b) ...**NIE**... $\sin(3\alpha) = \cos(3\alpha)$;
- (c) ...**TAK**... $\sin(4\alpha) = \cos(\alpha)$.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$;

Jest to powszechnie znany wzór.

...**NIE**... $\sin(3\alpha) = \cos(3\alpha)$;

Powyższa równość zachodzi tylko dla $3\alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$.

...**TAK**... $\sin(4\alpha) = \cos(\alpha)$.

Na mocy wzoru redukcyjnego $\sin(4\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Jeśli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to:

- (a) ...**NIE**... ułamek $\frac{a+5b}{a+7b}$ też jest nieskracalny,
 (b) ...**TAK**... ułamek $\frac{3a+4b}{2a+3b}$ też jest nieskracalny,
 (c) ...**TAK**... ułamek $\frac{a+b}{a+2b}$ też jest nieskracalny.

Wyjaśnienie:

...**NIE**... ułamek $\frac{a+5b}{a+7b}$ też jest nieskracalny,

Aby znaleźć kontrprzykład, weźmy $a = 3, b = 1$. Wówczas $NWD(3, 1) = 1$ i ułamek $\frac{3}{1}$ jest nieskracalny, ale $\frac{3+5}{3+7} = \frac{8}{10}$ nie jest nieskracalny. Zatem stwierdzenie jest fałszywe.

...**TAK**... ułamek $\frac{3a+4b}{2a+3b}$ też jest nieskracalny,

Niech $d = NWD(3a+4b, 2a+3b)$. Wtedy d dzieli kombinację $(3a+4b) - (2a+3b) = a+b$, czyli $d \mid a+b$. Ponadto $d \mid 2a+3b$, więc $d \mid (2a+3b - 2(a+b)) = 2a+3b - 2a - 2b = b$. Z $d \mid b$ i $d \mid a+b$ wynika $d \mid a$. Zatem $d \mid a$ i $d \mid b$, więc $d = 1$, ponieważ $NWD(a, b) = 1$. Ułamek jest zatem nieskracalny.

...**TAK**... ułamek $\frac{a+b}{a+2b}$ też jest nieskracalny.

Niech $d = NWD(a+b, a+2b)$. Wtedy d dzieli różnicę $(a+2b) - (a+b) = b$, więc $d \mid b$. Ponadto d dzieli $(a+b) - b = a$, zatem $d \mid a$ i $d \mid b$, czyli $d \mid NWD(a, b) = 1$. Stąd $d = 1$. Ułamek jest nieskracalny.

6. Dany jest $\triangle ABC$. Wówczas:

- (a) ...**TAK**... $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$;
 (b) ...**NIE**... jeśli AD, BE, CF są wysokościami, to $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$;
 (c) ...**TAK**... jeśli AS, BT, CU są środkowymi, to $\vec{AS} + \vec{BT} + \vec{CU} = \vec{0}$.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$;

Wprost z definicji dodawania wektorów wynika, że $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = -\vec{CA}$.

...**NIE**... jeśli AD, BE, CF są wysokościami, to $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$;

Wystarczy rozważyć np. dowolny trójkąt prostokątny.

...**TAK**... jeśli AS, BT, CU są środkowymi, to $\vec{AS} + \vec{BT} + \vec{CU} = \vec{0}$.

Niech X oznacza przesunięcie punktu S o wektor \vec{BT} . Wówczas trójkąt $\triangle SCX$ jest przystający do trójkąta $\triangle BST$ (cecha BKB). Wobec tego czworokąt $TSCX$ jest równoległobokiem, bo odcinki ST i CX są równoległe i równej długości. Ale ST jest również równoległy i równej długości z odcinkiem UA . W takim razie czworokąt $AUCX$ jest równoległobokiem i $\vec{XA} = \vec{CU}$. Mamy zatem

$$\vec{AS} + \vec{BT} + \vec{CU} = \vec{AS} + \vec{SX} + \vec{XA} = \vec{0},$$

co należało wykazać.

7. Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wtedy:

- (a) ...**NIE**... jeśli $x + y + z \geq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$;
 (b) ...**TAK**... jeśli $x + y + z \leq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$;
 (c) ...**NIE**... jeśli $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq 3$, to $x + y + z \geq 3$.

Wyjaśnienie:

...**NIE**... jeśli $x + y + z \geq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$;

Wystarczy podstawić np. $x = y = 2, z = 0,01$.

...**TAK**... jeśli $x + y + z \leq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$;

Wykorzystamy nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną, a średnią harmoniczną:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Po przekształceniu:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Teraz wystarczy skorzystać z założenia $x + y + z \leq 3$ do oszacowania prawej strony powyższej nierówności.

...**NIE**... jeśli $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq 3$, to $x + y + z \geq 3$.

Wystarczy podstawić np. $x = 1,501, y = 0,751, z = 0,001$.

8. Oznaczmy przez $f_m(x)$ rodzinę funkcji kwadratowych postaci

$$f_m(x) = mx^2 - (3m+4)x + m - 5 \quad \text{dla } m \neq 0.$$

Wtedy:

(a) ...**TAK**... $f_m(1) > f_{m+1}(0)$ dla $m < -\frac{5}{2}$;

(b) ...**NIE**... wyrażenie $\frac{f_4(x) - f_m(4)}{4}$ jest całkowite dla każdego całkowitego x i parzystego m ;

(c) ...**NIE**... $f_m(x)$ ma dwa pierwiastki całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... $f_m(1) > f_{m+1}(0)$ dla $m < -\frac{5}{2}$;

Ponieważ

$$f_m(1) = m - (3m+4) + m - 5 = -m - 9 \quad \text{oraz} \quad f_{m+1}(0) = m + 1 - 5 = m - 4.$$

Wtedy nierówność $f_m(1) > f_{m+1}(0)$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} -m - 9 &> m - 4 \\ -2m &> 5m - < \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

co pokazuje prawdziwość pierwszej tezy.

...**NIE**... wyrażenie $\frac{f_4(x) - f_m(4)}{4}$ jest całkowite dla każdego całkowitego x i parzystego m ;

Wyznamy postać wyrażenia $\frac{f_4(x) - f_m(4)}{4}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} \frac{f_4(x) - f_m(4)}{4} &= \frac{4x^2 - 16x - 1 - (16m - 12m - 16 + m - 5)}{4} \\ &= \frac{4x^2 - 16x - 1 - (5m - 21)}{4} = \frac{4x^2 - 16x + 20 - 5m}{4} \\ &= x^2 - 4x + 5 - 5 \cdot \frac{m}{4}. \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie $x^2 - 4x + 5$ jest całkowite dla całkowitych x , to całość będzie całkowita, gdy $\frac{m}{4}$ będzie liczbą całkowitą. Tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy m będzie podzielne przez 4, co pokazuje że teza druga jest fałszywa.

...NIE... $f_m(x)$ ma dwa pierwiastki całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$

Do oceniania prawdziwości tezy wystarczy sprawdzić, że $f_1(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

9. Dany jest czworokąt $ABCD$. Oznaczmy przez E, F, G, H odpowiednio środki odcinków AB, BC, CD, DA . Wtedy:

- (a) ...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, to $ABCD$ jest kwadratem;
- (b) ...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest prostokątem, to $ABCD$ jest rombem;
- (c) ...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ jest czworokątem wypukłym.

Wyjaśnienie:

...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, to $ABCD$ jest kwadratem;

Za $ABCD$ wystarczy wziąć deltoid o równych przekątnych, który nie jest kwadratem.

...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest prostokątem, to $ABCD$ jest rombem;

Podobnie jak wyżej, wystarczy rozważyć deltoid.

...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ jest czworokątem wypukłym.

Czworokąt $EFGH$ jest równoległobokiem dla dowolnego czworokąta $ABCD$ (niekoniecznie wypukłego). Jest to tzw. Twierdzenie Varignona.

10. Graniastosłup prawidłowy czworokątny (prostopadłościan o podstawie kwadratowej) rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju czworokąt. Wynika z tego, że:

- (a) ...NIE... każdy z otrzymanych wielościanów ma co najmniej jedną ścianę kwadratową;
- (b) ...TAK... każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem, czworokątem lub pięciokątem;
- (c) ...NIE... w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie.

Wyjaśnienie:

...NIE... każdy z otrzymanych wielościanów ma co najmniej jedną ścianę kwadratową;

W graniastosłowie jedynymi ścianami, które na pewno są kwadratami, są podstawy (ściany boczne są prostokątami, które tylko w szczególnym przypadku, gdy wysokość równa się krawędzi podstawy, stają się kwadratami). Aby oba wielościany miały ścianę kwadratową, każdy z nich musiałby zawierać całą jedną podstawę. Istnieją jednak cięcia, które przecinają obie podstawy. Na przykład płaszczyzna pionowa (prostopadła do podstaw) przecinająca graniastosłup wzdłuż linii równoległej do krawędzi bocznych – wtedy w przekroju otrzymujemy czworokąt, a obie podstawy zostają podzielone. W powstałych wielościanach żadna ze ścian nie jest kwadratem (fragmenty podstaw są wielokątami, a ściany boczne – prostokątami lub ich częściami). Zatem stwierdzenie (a) nie jest prawdziwe w ogólności.

...TAK... każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem, czworokątem lub pięciokątem;

Wszystkie ściany powstałych wielościanów pochodzą albo z pierwotnych ścian graniastosłupa (podstaw i ścian bocznych), albo z płaszczyzny przekroju.

- Ściana będąca przekrojem jest z założenia czworokątem.
- Każda pierwotna ściana (prostokąt) może być przecięta płaszczyzną wzdłuż jednego odcinka łączącego dwa punkty na jej brzegu. W zależności od położenia tych punktów otrzymujemy:
 - jeśli punkty leżą na przeciwległych krawędziach – dwa czworokąty,
 - jeśli na sąsiednich krawędziach – trójkąt i pięciokąt,
 - jeśli jeden z punktów jest wierzchołkiem – również trójkąt i czworokąt (lub trójkąt i pięciokąt).

W żadnym przypadku nie powstaje wielokąt o więcej niż pięciu bokach, ponieważ pojedyncze cięcie prostokąta daje co najwyżej pięciokąt.

- Ściany nieprzecięte pozostają czworokątami.

Zatem każda ściana ma 3, 4 lub 5 boków. Stwierdzenie (b) jest prawdziwe.

...NIE... w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie.

Aby wykazać, że nie musi tak być, podajemy przykład cięcia, w którym powstaje wierzchołek o większej liczbie krawędzi. Wybierzmy graniastosłup o podstawie kwadratowej $ABCD$ (dolna) i górnej $A'B'C'D'$. Niech płaszczyzna przechodzi przez wierzchołek A oraz przez punkty P na krawędzi BB' , Q na CC' i R na DD' tak dobrane, że wszystkie cztery punkty leżą w jednej płaszczyźnie (jest to możliwe przy odpowiednim doborze wysokości tych punktów). Odcinki AP , PQ , QR i RA leżą odpowiednio na ścianach bocznych $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ i $ADD'A'$, tworząc czworokątny przekrój. W powstałych wielościanach wierzchołek A jest punktem, w którym zbiegają się: trzy pierwotne krawędzie AB , AD , AA' oraz dwie nowe krawędzie przekroju AP i AR – łącznie pięć krawędzi. Wówczas w wierzchołku A wielościanu $ABCDPQR$ schodzą się cztery krawędzie AB , AD , AP , AR . Zatem nie w każdym wierzchołku są dokładnie trzy krawędzie. Stąd stwierdzenie (c) jest fałszywe.

11. Cyfry x i y są cyframi liczby $M = 512xy34$ zapisanej w systemie dziesiętnym. Wówczas:

- ...NIE...** istnieje dokładnie 10 par (x, y) takich cyfr, dla których 9 dzieli liczbę M ,
- ...TAK...** istnieją takie cyfry x i y , dla których 99 dzieli liczbę M ,
- ...NIE...** istnieją co najmniej dwie pary cyfr (x, y) , dla których 77 dzieli liczbę M .

Wyjaśnienie:

...NIE... istnieje dokładnie 10 par (x, y) takich cyfr, dla których 9 dzieli liczbę M ,

Liczba jest podzielna przez 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Suma cyfr: $5+1+2+x+y+3+4 = 15+x+y$. Warunek: $15+x+y \equiv 0 \pmod{9}$, czyli $x+y \equiv 3 \pmod{9}$. Ponieważ $x, y \in \{0, 1, \dots, 9\}$, to $x+y$ może przyjąć wartości 3 lub 12 (gdyż $21 > 18$). Dla $x+y = 3$ mamy pary: $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$ – 4 pary. Dla $x+y = 12$ mamy pary: $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$, $(6, 6)$, $(7, 5)$, $(8, 4)$, $(9, 3)$ – 7 par. Razem $4+7 = 11$ par. Zatem nie jest to 8 par.

...TAK... istnieją takie cyfry x i y , dla których 99 dzieli liczbę M ,

$99 = 9 \cdot 11$, a 9 i 11 są względnie pierwsze. Musimy więc zapewnić podzielność przez 9 i przez 11. Warunek na podzielność przez 9: $x+y \equiv 3 \pmod{9}$, czyli $x+y = 3$ lub 12. Liczba jest podzielna przez 11, gdy różnica między sumą jej cyfr na miejscach parzystych, a sumą cyfr na miejscach nieparzystych (licząc od prawej lub lewej strony) wynosi 0 lub jest liczbą podzielną przez 11. Warunek na podzielność przez 11: dla liczby o cyfrach (od prawej) $4, 3, y, x, 2, 1, 5$ mamy sumę na miejscach nieparzystych: $4+y+2+5 = 11+y$, na parzystych: $3+x+1 = 4+x$. Różnica: $(11+y) - (4+x) = 7+y-x$ musi być podzielna przez 11, czyli $7+y-x \equiv 0 \pmod{11}$, co daje $y-x \equiv 4 \pmod{11}$. Ponieważ $y-x \in [-9, 9]$, możliwe są $y-x = 4$ lub $y-x = -7$.

Rozpatrujemy przypadki:

- $y - x = 4$: wtedy $x + y = 2x + 4$. Dla $x + y = 3$ otrzymujemy $2x + 4 = 3 \Rightarrow x = -0,5$ (odrzucaamy). Dla $x + y = 12$ mamy $2x + 4 = 12 \Rightarrow x = 4, y = 8$. Para $(4, 8)$ spełnia warunki.
- $y - x = -7$: wtedy $x + y = 2x - 7$. Dla $x + y = 3$ mamy $2x - 7 = 3 \Rightarrow x = 5, y = -2$ (odrzucaamy). Dla $x + y = 12$ mamy $2x - 7 = 12 \Rightarrow x = 9,5$ (odrzucaamy).

Zatem istnieje dokładnie jedna para $(4, 8)$ spełniająca oba warunki, więc M jest podzielne przez 99.

...**NIE**... istnieją co najmniej dwie pary cyfr (x, y) , dla których 77 dzieli liczbę M .

$77 = 7 \cdot 11$. Podzielność przez 11 daje te same warunki co poprzednio: $y - x = 4$ lub $y - x = -7$.

Wypiszmy wszystkie pary (x, y) spełniające te warunki:

- $y = x + 4$: $x = 0, \dots, 5 \rightarrow (0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)$ – 6 par.
- $y = x - 7$: $x = 7, 8, 9 \rightarrow (7, 0), (8, 1), (9, 2)$ – 3 pary. Razem 9 par.

Sprawdzamy teraz podzielność przez 7. Obliczmy $M \pmod{7}$. Korzystając z $10^k \pmod{7}$: $10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv 3, 10^2 \equiv 2, 10^3 \equiv 6, 10^4 \equiv 4, 10^5 \equiv 5, 10^6 \equiv 1$. Mamy: $5 \cdot 10^6 \equiv 5 \cdot 1 = 5, 1 \cdot 10^5 \equiv 1 \cdot 5 = 5, 2 \cdot 10^4 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \equiv 1, 3 \cdot 10^3 \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 2, 4 \equiv 4$, razem stała część: $5 + 5 + 1 + 2 + 4 = 17 \equiv 3 \pmod{7}$. Dodajemy $x \cdot 10^3 \equiv 6x$ i $y \cdot 10^2 \equiv 2y$, więc $M \equiv 3 + 6x + 2y \pmod{7}$. Warunek podzielności przez 7: $3 + 6x + 2y \equiv 0 \pmod{7}$, czyli $6x + 2y \equiv 4 \pmod{7}$ (bo $-3 \equiv 4$).

Sprawdzamy każdą parę:

- $(0, 4)$: $6 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8 \equiv 1$
- $(1, 5)$: $6 + 10 = 16 \equiv 2$
- $(2, 6)$: $12 + 12 = 24 \equiv 3$
- $(3, 7)$: $18 + 14 = 32 \equiv 4 \rightarrow$ spełnia
- $(4, 8)$: $24 + 16 = 40 \equiv 5$
- $(5, 9)$: $30 + 18 = 48 \equiv 6$
- $(7, 0)$: $42 + 0 = 42 \equiv 0$
- $(8, 1)$: $48 + 2 = 50 \equiv 1$
- $(9, 2)$: $54 + 4 = 58 \equiv 2$

Tylko jedna para $(3, 7)$ spełnia warunek. Zatem istnieje dokładnie jedna para, a nie co najmniej dwie.

12. Na płaszczyźnie danych jest 2026 prostych, spośród których k jest równoległych do osi OX , a pozostałe są równoległe do osi OY . Oznaczmy przez $S(k)$ liczbę obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę. Wówczas:

- ...**TAK**... $S(10) = S(2016)$,
- ...**NIE**... $S(k) = k \cdot (2026 - k)$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, 2025$,
- ...**TAK**... suma $S(0) + S(1) + \dots + S(2026)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... $S(10) = S(2016)$,

Mamy 2026 prostych: k z nich jest równoległych do osi OX , a pozostałe $2026 - k$ są równoległe do osi OY . Liczba obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę, wynosi:

$$S(k) = (k + 1)(2027 - k),$$

gdyż najpierw k prostych poziomych dzieli płaszczyznę na $k + 1$ pasów, a każda z $2026 - k$ prostych pionowych przecina wszystkie poziome, zwiększając liczbę obszarów o $k + 1$ za każdym razem.

Stąd $S(10) = (10 + 1)(2027 - 10) = 11 \cdot 2017 = 22187$, $S(2016) = (2016 + 1)(2027 - 2016) = 2017 \cdot 11 = 22187$. Zatem $S(10) = S(2016)$.

...NIE... $S(k) = k(2026 - k)$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, 2025$,

$S(k) = (k + 1)(2027 - k) = -k^2 + 2026k + 2027$, natomiast $k(2026 - k) = 2026k - k^2$. Różnica: $S(k) - k(2026 - k) = 2027 \neq 0$ dla każdego k . Zatem stwierdzenie jest fałszywe.

...TAK... suma $S(0) + S(1) + \dots + S(2026)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4.

Obliczamy sumę $T = \sum_{k=0}^{2026} S(k) = \sum_{k=0}^{2026} (-k^2 + 2026k + 2027)$. Rozpatrzmy reszty z dzielenia przez 4 poszczególnych składników tej sumy:

$$\sum_{k=0}^{2026} k = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027,$$

$$\sum_{k=0}^{2026} k^2 \equiv 1013 \pmod{4},$$

ponieważ dla k parzystych $k^2 \equiv 0 \pmod{4}$, a dla k nieparzystych $k^2 \equiv 1 \pmod{4}$, a nieparzystych k jest w rozpatrywanym zakresie 1013,

$$\sum_{k=0}^{2026} 2027 = 2027 \cdot 2027.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2026} k &\equiv 1013 \cdot 2027 \equiv 1 \cdot 3 = 3 \pmod{4}, \\ \sum_{k=0}^{2026} k^2 &\equiv 1013 \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sum_{k=0}^{2026} 2027 &= 2027^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Zatem

$$T \equiv -1 + 2026 \cdot 3 + 1 \equiv -1 + 2 \cdot 3 + 1 = -1 + 6 + 1 = 6 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Reszta wynosi 2.

13. Dla liczby całkowitej n oznaczmy liczbę $n^2 + 3n + 4$ przez $L(n)$. Wówczas:

- (a) **...TAK...** $L(n)$ jest liczbą parzystą dla każdego $n \in \mathbb{Z}$;
- (b) **...NIE...** $L(n)$ jest podzielne przez 3 dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$;
- (c) **...TAK...** $L(n)$ jest liczbą pierwszą dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$.

Wyjaśnienie:

...TAK... $L(n)$ jest liczbą parzystą dla każdego $n \in \mathbb{Z}$;

Istotnie, zachodzi równość

$$L(n) = n^2 + 3n + 4 = n(n + 3) + 4.$$

Wtedy albo n lub $n + 3$ jest liczbą parzystą, więc ich iloczyn $n(n + 3)$ jest zawsze parzysty. Zatem również $n(n + 3) + 4$ jest liczbą parzystą.

...NIE... $L(n)$ jest podzielne przez 3 dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$;

Istotnie, możemy zapisać

$$L(n) = n^2 + 1 + 3(n + 1).$$

Ponieważ $3(n + 1)$ jest podzielne przez 3, to $L(n)$ jest podzielne przez 3 tylko wtedy, gdy $n^2 + 1$ jest podzielne przez 3. Zauważmy, że wyrażenie $n^2 + 1$ nigdy nie jest podzielne przez trzy. Istnieją trzy możliwości $n = 3k$ lub $n = 3k + 1$ lub $n = 3k + 2$ dla pewnego k całkowitego.

1. Gdy $n = 3k$, to $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ ma resztę 1 z dzielenia przez 3.
2. Gdy $n = 3k + 1$, to $n^2 + 1 = (3k + 1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3(3k^2 + 2k) + 2$ ma resztę 2 z dzielenia przez 3.
3. Gdy $n = 3k + 2$, to $n^2 + 1 = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2$ ma resztę 2 z dzielenia przez 3.

Zatem liczba $n^2 + 1$ nie jest podzielna przez 3, stąd również $L(n)$ nie jest podzielna przez 3 dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

...TAK... $L(n)$ jest liczbą pierwszą dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $L(n)$ jest parzyste. Jediną liczbą pierwszą parzystą jest 2. Zatem musimy rozwiązać równanie

$$n^2 + 3n + 4 = 2.$$

Wtedy otrzymujemy $L(-1) = L(-2) = 2$.

14. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ o przeciwprostokątnej BC , dwusieczna CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 1, |BD| = 2$. Wówczas:

- (a) **...NIE...** $|CD| = \sqrt{3}$;
- (b) **...TAK...** $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}$;
- (c) **...TAK...** odległość D od boku BC jest równa 1.

Wyjaśnienie:

...NIE... $|CD| = \sqrt{3}$;

Korzystając z twierdzenia o dwusiecznej, wiemy, że $|BC| = 2 \cdot |AC|$. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AC| = \sqrt{3}$ i $|CD| = 2$.

...TAK... $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}$;

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, znajdujemy, że $|BC| = 2\sqrt{3}$ i $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

...TAK... odległość D od boku BC jest równa 1.

Oznaczmy przez E rzut prostokątny punktu D na bok BC . Wtedy $\sin(\sphericalangle DBE) = \sin(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}$, zaś $|DB| = 2$. Czyli $|DE| = 1$.

15. Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera, dla którego oznaczamy

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{oraz} \quad T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n},$$

przy czym zakładamy, że $S_n \neq 0$ i $T_n \neq 0$ dla każdego n . Wtedy:

- (a) ...**TAK**... istnieje ciąg (a_n) taki, że $S_n = T_n$ dla każdego n naturalnego;
- (b) ...**TAK**... dla nieparzystych n sumy S_n i T_n mają ten sam znak;
- (c) ...**NIE**... jeżeli a_n jest ciągiem liczb całkowitych, to $\frac{S_{2026}}{T_{2026}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... istnieje ciąg (a_n) taki, że $S_n = T_n$ dla każdego n naturalnego;

Wystarczy położyć $a_n = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

...**TAK**... dla nieparzystych n sumy S_n i T_n mają ten sam znak;

Ponieważ ciąg a_n jest geometryczny, to $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ dla każdego k naturalnego. Wtedy

$$\begin{aligned} a_1^2 q^{n-1} \cdot T_n &= a_1^2 q^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= a_1^2 q^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \dots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} \right) \\ &= a_1 q^{n-1} + q_1 q^{n-2} + \dots + a_1 = S_n. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy wzór¹

$$(\star) \quad \frac{S_n}{T_n} = a_1^2 q^{n-1}.$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $n = 2k + 1$ dla pewnego k naturalnego, stąd zatem $a_1^2 q^{n-1} = a_1^2 q^{2k} = (a_1 q^k)^2$ jest liczbą dodatnią (nie może być równe zero, bo ciąg a_n jest niezerowy). Zatem S_n i T_n mają ten sam znak.

...**NIE**... jeżeli a_n jest ciągiem liczb całkowitych, to $\frac{S_{2026}}{T_{2026}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Ze wzoru (\star) otrzymujemy, że $\frac{S_{2026}}{T_{2026}} = a_1^2 q^{2025}$. Zaś wyrażenie $a_1^2 q^{2025}$ zazwyczaj nie jest kwadratem liczby naturalnej, dla przykładu dla $a_1 = 2$ i $q = -1$ otrzymujemy $a_1^2 q^{2025} < 0$.

16. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ o bokach $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CA| = 5$ i punkt X w jego wnętrzu. Wtedy:

- (a) ...**TAK**... istnieje dokładnie jeden punkt X , dla którego stosunek pól $P_{\triangle ABX} : P_{\triangle BCX} : P_{\triangle CAX}$ wynosi $3 : 4 : 5$;
- (b) ...**NIE**... jeśli odległości punktu X od boków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od wierzchołków również są liczbami wymiernymi;
- (c) ...**TAK**... jeśli odległości punktu X od wierzchołków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od boków również są liczbami wymiernymi.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... istnieje dokładnie jeden punkt X , dla którego stosunek pól $P_{\triangle ABX} : P_{\triangle BCX} : P_{\triangle CAX}$ wynosi $3 : 4 : 5$;

¹Wzór ten mogliśmy również otrzymać zauważając, że ciąg $\frac{1}{a_k}$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$ jest geometryczny, a następnie korzystając ze wzoru na sumę częściową ciągu geometrycznego zarówno dla S_n i T_n .

Oznaczmy przez x, y, z odległości punktu P kolejno od boków AB, BC i CA . Wówczas

$$P_{\triangle ABP} = \frac{3x}{2}, P_{\triangle BCP} = \frac{4y}{2}, P_{\triangle CAP} = \frac{5z}{2}.$$

Zatem aby $P_{\triangle ABP} : P_{\triangle BCP} : P_{\triangle CAP} = 3 : 4 : 5$, musi zachodzić $x = y = z$, więc punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

...**NIE**... jeśli odległości punktu X od boków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od wierzchołków również są liczbami wymiernymi;

Rozważmy środek ciężkości S trójkąta ABC , oznaczmy przez S_a, S_b, S_c jego rzuty prostokątne kolejno na boki BC, CA, AB , przez D środek odcinka BC , a przez D_b jego rzut prostokątny na odcinek CA . Jako że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w stosunku 2:1, od wierzchołka licząc, z twierdzenia Talesa wynika, że $|SS_a| = 1$ i $|SS_c| = \frac{4}{3}$. $P_{\triangle DCA} = \frac{1}{2} \cdot P_{\triangle ABC} = 3$, więc $|DD_b| = \frac{6}{5}$ i znowu z twierdzenia Talesa, $|SS_b| = \frac{4}{5}$. Zatem odległości punktu $P = S$ od boków są liczbami wymiernymi. Natomiast $|SA| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{13}$.

...**TAK**... jeśli odległości punktu X od wierzchołków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od boków również są liczbami wymiernymi.

Oznaczmy przez x, y, z – odległości punktu P kolejno od boków AB, BC i CA , a odległości od wierzchołków: $|PA| = u, |PB| = v, |PC| = w$. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$u^2 = x^2 + (3 - y)^2 = x^2 + 9 - 6y + y^2, x^2 + y^2 = v^2,$$

czyli $y = \frac{9+v^2-u^2}{6} \in \mathbb{Q}$. Podobnie,

$$w^2 = y^2 + (4 - x)^2 = y^2 + 16 - 8x + x^2 \text{ i znowu } x^2 + y^2 = v^2,$$

więc $x = \frac{v^2-w^2+16}{8} \in \mathbb{Q}$. Jako, że x i y są liczbami wymiernymi, to pola trójkątów $\triangle ABP$ i $\triangle BCP$ są wymierne. Zatem pole trójkąta $\triangle CAP$ też jest liczbą wymierną, a z tego wynika, że $z \in \mathbb{Q}$.

17. Istnieje kwadrat liczby naturalnej, który zakończony jest (w systemie dziesiętnym):

- (a) ...**TAK**... dwoma cyframi 4;
- (b) ...**TAK**... trzema cyframi 4;
- (c) ...**NIE**... czterema cyframi 4.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... dwoma cyframi 4;

Taką liczbą jest np. $12^2 = 144$

...**TAK**... trzema cyframi 4;

Taką liczbą jest np. $38^2 = 1444$.

...**NIE**... czterema cyframi 4.

Założmy, że istnieje liczba n zakończona czterema cyframi, tzn. $n^2 \equiv 4444 \pmod{10000}$. Stąd $n^2 \equiv 4444 \pmod{16}$ bo 16 dzieli 10000. Biorąc teraz 4444 modulo 16 dostajemy

$$n^2 \equiv 12 \pmod{16}.$$

Teraz wystarczy sprawdzić, że takie n nie istnieje. W tym celu podstawiamy za n liczby $0, 1, \dots, 15$.

18. Miesiąc nazwiemy sprytnym, gdy jego trzynastym dniem jest piątek. Wówczas:

- (a) ...**NIE**... istnieje rok, w którym nie ma sprytnych miesięcy;
- (b) ...**TAK**... istnieje rok z dokładnie dwoma sprytnymi miesiącami;
- (c) ...**NIE**... istnieje rok z czterema (lub więcej) sprytnymi miesiącami.

Wyjaśnienie:

Przypiszmy każdemu dniowi tygodnia resztę z dzielenia przez 7 w następujący sposób: niedziela $\rightarrow 0$, poniedziałek $\rightarrow 1, \dots$, sobota $\rightarrow 6$. Przez n oznaczmy resztę przypisaną dniowi tygodnia, który wypada 13. stycznia i zróbmy tabelę dni tygodnia, które są w trzynastych dniach miesiąca. Rozważmy dwa przypadki:

- (a) Rok zwykły

Styczeń n	Luty $n + 3$	Marzec $n + 3$	Kwiecień $n + 5$
Maj $n + 1$	Czerwiec $n + 4$	Lipiec $n + 6$	Sierpień $n + 2$
Wrzesień $n + 5$	Październik n	Listopad $n + 3$	Grudzień $n + 5$

- (b) Rok przestępny

Styczeń n	Luty $n + 3$	Marzec $n + 4$	Kwiecień $n + 6$
Maj $n + 2$	Czerwiec $n + 5$	Lipiec n	Sierpień $n + 3$
Wrzesień $n + 6$	Październik $n + 1$	Listopad $n + 4$	Grudzień $n + 6$

W obu przypadkach widzimy, że każdy z dni tygodnia pojawia się co najmniej raz w danym roku i nie więcej niż 3 razy oraz, że niektóre dni powtarzają się dokładnie 2 razy. Jako że n można wybrać dowolnie, to w szczególności w taki sposób, żeby piątek pojawiał się dwukrotnie.

19. Przez $\tau(n)$ oznaczamy liczbę dodatnich dzielników liczby n . Na przykład $\tau(6) = 4$, $\tau(11) = 2$ itd.

Przez a_n oznaczamy liczbę $\frac{\tau((n+1)!)}{\tau(n!)}$. Na przykład $a_1 = 2$, $a_2 = 2$. Wówczas:

- (a) ...**TAK**... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n = 2$;
- (b) ...**TAK**... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n < 2$;
- (c) ...**NIE**... $a_{11} = \frac{3}{2} a_{10}$.

Wyjaśnienie:

W tym zadaniu przyda nam się wiedza z rozdziałów 2 i 4 książki „Algebra i teoria liczb” autorstwa Adama Neugebauera.

...**TAK**... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n = 2$;

Jeśli $n + 1 \in \mathbb{P}$, to każdy dzielnik liczby $(n + 1)!$ jest postaci d lub $(n + 1)d$, gdzie $d|n!$. Liczb tych dwu postaci jest tyle samo, więc $a_n = 2$.

...**TAK**... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n < 2$;

Oznaczmy przez $v_2(x)$ najwyższą potęgę liczby 2 dzielącą $x \in \mathbb{N}$ (wykładnik 2-adyczny). Niech $k \geq 3$ i $n = 2^k - 1$. Zauważmy, że

$$v_2(n+1)! = v_2((2^k)!) = 2^{k-1} + \dots + 1 = 2^k - 1,$$

zaś

$$v_2(n!) = v_2((2^k - 1)!) = 2^k - 1 - k.$$

Wówczas

$$\tau((2^k)!) = \tau(2^{2^k-1}) \cdot \tau(x) = 2^k \cdot \tau(x), \quad \tau((2^k - 1)!) = \tau(2^{2^k-1-k}) \cdot \tau(x) = (2^k - k) \cdot \tau(x),$$

gdzie $x = \frac{n!}{2^n}$. Dla $k \geq 3$ mamy nierówność

$$a_n = \frac{\tau((n+1)!)}{\tau(n!)} = \frac{2^k}{2^k - k} < 2.$$

...**NIE**... $a_{11} = \frac{3}{2} a_{10}$.

Na mocy punktu (a), $a_{10} = 2$. Rozłóżmy $12!$ i $11!$ na czynniki pierwsze.

$$12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, \quad 11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

Wynika z tego, że

$$\tau(12!) = 11 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2, \quad \tau(11!) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Wobec tego $a_{11} = \frac{66}{45}$, czyli $a_{11} \neq \frac{3}{2} a_{10}$.

20. Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 2$ dany jest wzorem:

$$a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Wtedy:

(a) ...**TAK**... ciąg (a_n) jest malejący;

(b) ...**TAK**... $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$;

(c) ...**NIE**... w postaci nieskracalnej licznik liczby a_n jest liczbą pierwszą dla każdego $n \geq 2$.

Wyjaśnienie:

...**TAK**... ciąg (a_n) jest malejący;

Dla każdego $n \geq 2$, $a_n > 0$ oraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} < 1,$$

więc (a_n) jest ciągiem malejącym.

...**TAK**... $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$;

Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1.$$

Wynika z niej, że

$$a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}.$$

Wobec tego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$.

...**NIE**... w postaci nieskracalnej licznik liczby a_n jest liczbą pierwszą dla każdego $n \geq 2$.

Skoro $a_n = \frac{2(n^2+n+1)}{3(n^2+n)}$, to jako że $n^2 + n + 1$ jest względnie pierwsze z $n^2 + n$, wystarczy znaleźć takie $n \in \mathbb{N}$, że $n^2 + n + 1$ jest liczbą złożoną i niepodzielną przez 3. Widzimy, że np.

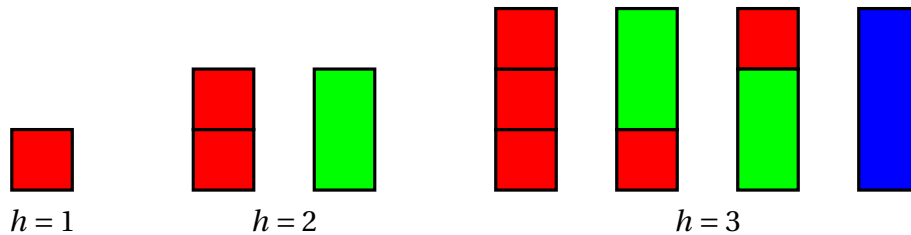
$$a_9 = \frac{91}{135}, \quad 91 = 13 \cdot 7.$$

II. ZADANIA TEKSTOWE

Zadanie 1 (wersja kolorowa). W pudełko do gry „Tower” znajdują się trzy rodzaje klocków prostopadłościennych:

- czerwone o wymiarach $1 \times 1 \times 1$,
- zielone o wymiarach $1 \times 1 \times 2$,
- niebieskie o wymiarach $1 \times 1 \times 3$.

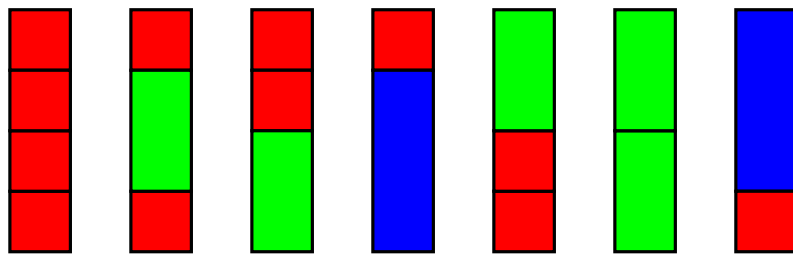
Gra polega na układaniu wieży o ustalonej wysokości h , poprzez ustawianie kolejnych klocków na sobie. Na poniższym schemacie przedstawiliśmy wszystkie możliwe wieże o wysokościach mniejszych niż 4.



Zakładamy, że dysponujemy nieograniczoną liczbą klocków każdego rodzaju. Niech T_h oznacza liczbę wszystkich możliwych wież o wysokości h . Z powyższego rysunku wynika, że $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ oraz $T_3 = 4$. Pokaż, że

- a. T_{13} jest liczbą nieparzystą.
- b. T_h jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy h daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 4.

Rozwiązanie. Z treści zadania znamy już T_1 , T_2 oraz T_3 . Wszystkie wieże wysokości $h = 4$ przedstawiliśmy na następującym schemacie:



z którego wynika, że $T_4 = 7$. Podobnie można sprawdzić, że $T_5 = 13$ i $T_6 = 24$. W każdym następnym kroku liczba kolejnych wież będzie znacząco rosła i próba wyznaczenia (wyrysowania) ich wszystkich jest pozbawiona sensu. Zbadamy zachowanie tego ciągu.

W tym celu przyjrzyjmy się ponownie wszystkim wieżom wysokości $h = 4$. Zauważmy, że cztery pierwsze z narysowanych wież kończą się czerwonym klockiem, jest ich dokładnie tyle wież, co wysokości 3, czyli T_3 . Następne dwie wieże kończą się zielonym klockiem, zatem jest ich tyle co wież o wysokości 2, czyli T_2 . Ostatnia wieża kończy się niebieskim klockiem, jest tylko jedna, czyli dokładnie jak liczba T_1 . Stąd wniosek, że

$$T_4 = T_3 + T_2 + T_1.$$

W podobny sposób łatwo możemy zauważyć, że

$$T_5 = T_4 + T_3 + T_2 \quad \text{oraz} \quad T_6 = T_5 + T_4 + T_3.$$

Pokażemy, że zachodzi zależność rekurencyjna

$$(\star) \quad T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

W tym celu zauważmy, że dowolna wieża o wysokości $n + 3$ może kończyć się czerwonym, zielonym lub niebieskim klockiem. Jeżeli jest ona zakończona czerwonym klockiem, to pozostałe klocki w tej wieży tworzą wieżę o wysokości $n + 2$, takich wież jest dokładnie T_{n+2} . Jeżeli natomiast wieża kończy się zielonym klockiem, to pozostałe klocki tworzą wieżę o wysokości $n + 1$, takich wież jest dokładnie T_{n+1} . Ostatecznie wież z niebieskim klockiem na szczycie jest T_n . Zatem wszystkich wież o wysokości $n + 3$ jest $T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, co pokazuje (\star) .

Wykorzystując zależność rekurencyjną (\star) łatwo możemy doliczyć się, że $T_{13} = 1705$. Stąd T_{13} jest liczbą nieparzystą. Chociaż niewątpliwie łatwiej byłoby po prostu zastanowić się nad samą parzystością kolejnych wyrazów ciągu T_h . Istotnie $T_4 = T_3 + T_2 + T_1$ jest liczbą nieparzystą, gdyż jest sumą dwóch liczb parzystych i jednej nieparzystej. Podobnie T_5 jest nieparzyste, jako suma dwóch liczb parzystych i jednej nieparzystej. W ten sposób łatwo możemy otrzymać następującą tabelę:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
parzystość T_h	NP	P	P	NP	NP	P	P	NP	NP	P	P	NP	NP

co pokazuje nieparzystość T_{13} .

W dowodzie podpunktu **b.** wykorzystamy rozumowanie z części **a.** Rozważmy ciąg trójek

$$t_n := \left(T_n(\text{mod}2), T_{n+1}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2) \right),$$

gdzie $T_n(\text{mod}2)$ oznacza wzięcie reszty z dzielenia T_n przez 2. Ze wzoru rekurencyjnego (\star) zachodzi zależność

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \left(T_{n+1}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2) \right) \\ &= \left(T_{n+1}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2) + T_{n+1}(\text{mod}2) + T_n(\text{mod}2) \right). \end{aligned}$$

Zatem każda trójka t_n jednoznacznie wyznacza kolejną trójkę t_{n+1} . Odnotujmy, że wszystkich możliwych trójek jest 8 (każdy element trójki możemy wybrać na dwa sposoby 0 lub 1). Oznacza, to że jakieś dwie trójki muszą się powtórzyć, a wtedy wszystkie następne trójki będą pojawiały się okresowo. Z rachunku wykonanego w części **a.** (tabelka) wynika, że $t_1 = t_5$. Zatem wszystkie trójki będą się powtarzały z okresem równym 4. Stąd

wyrazy T_{n+4} i T_n mają tą samą parzystość dla każdego $n \geq 1$.

Ponieważ wśród czterech pierwszych wyrazów tylko T_2 i T_3 są parzyste, to T_n będzie parzyste wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 4k + 2$ lub $n = 4k + 3$ dla pewnego k naturalnego, co pokazuje tezę **b.** \square

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o bokach $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ oraz $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle BCD = \gamma$. Załóżmy, że w czworokąt ten można wpisać okrąg. Pokaż, że pole S czworokąta $ABCD$ wyraża się wzorem

$$S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right).$$

Rozwiązanie. Skoro czworokąt jest opisany na okręgu to:

$$a + c = b + d. \tag{1}$$

Podzielmy czworokąt przekątną BD na dwa trójkąty: ABD i BCD . W trójkącie ABD znamy boki $|AB| = a$, $|AD| = d$ oraz kąt α między nimi, więc jego pole wynosi $\frac{1}{2}ad \sin \alpha$. W trójkącie BCD mamy boki $|BC| = b$, $|CD| = c$ i kąt γ między nimi, więc jego pole to $\frac{1}{2}bc \sin \gamma$. Zatem pole całego czworokąta

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma). \tag{2}$$

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do boku BD w obu trójkątach otrzymujemy

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \quad (3)$$

$$|BD|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma. \quad (4)$$

Przyrównując prawe strony, dostajemy

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad \cos \alpha - bc \cos \gamma). \quad (5)$$

Rozważmy teraz wyrażenie $(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2$. Dodajmy do niego $(ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)^2$ i przekształćmy korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} & (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 + (ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)^2 \\ &= a^2 d^2 \sin^2 \alpha + b^2 c^2 \sin^2 \gamma + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma \\ & \quad + a^2 d^2 \cos^2 \alpha + b^2 c^2 \cos^2 \gamma - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma \\ &= a^2 d^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 c^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) \\ & \quad + 2abcd (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma) \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Stąd

$$(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - (ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)^2. \quad (6)$$

Z równania (5) mamy $ad \cos \alpha - bc \cos \gamma = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}$. Wstawiając to do (6) otrzymujemy

$$(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} \right)^2. \quad (7)$$

Teraz wykorzystamy warunek styczności (1). Pokażemy, że

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad - bc. \quad (8)$$

Z (1) wynika $a - b = d - c$. Oznaczmy tę wspólną różnicę przez k , czyli $a = b + k$, $d = c + k$. Wtedy

$$\begin{aligned} ad - bc &= (b + k)(c + k) - bc = bc + bk + ck + k^2 - bc \\ &= k(b + c + k) = k(a + c), \\ \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} &= \frac{(b + k)^2 + (c + k)^2 - b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{b^2 + 2bk + k^2 + c^2 + 2ck + k^2 - b^2 - c^2}{2} = \frac{2k(b + c) + 2k^2}{2} \\ &= k(b + c + k) = k(a + c), \end{aligned}$$

co dowodzi (8).

Podstawiamy (8) do (7) (występuje tam kwadrat, więc możemy zastąpić $\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2$ przez $(ad - bc)^2$):

$$\begin{aligned} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - (ad - bc)^2 \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - (a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2) \\ &= 2abcd(1 - \cos(\alpha + \gamma)). \end{aligned}$$

Ponieważ $\alpha + \gamma = 2\varphi$, więc $1 - \cos(2\varphi) = 2 \sin^2 \varphi$. Zatem

$$(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 = 2abcd \cdot 2 \sin^2 \varphi = 4abcd \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Stąd

$$ad \sin \alpha + bc \sin \gamma = 2\sqrt{abcd} \sin \varphi, \quad (10)$$

gdzie wybieramy znak dodatni, ponieważ lewa strona jest dodatnia (kąty α, γ czworokąta wypukłego leżą w przedziale $(0, \pi)$, więc ich sinusy są dodatnie; także $\varphi = (\alpha + \gamma)/2 \in (0, \pi)$ i $\sin \varphi > 0$).

Wracając do wzoru (2) na pole, otrzymujemy

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma) = \sqrt{abcd} \sin \varphi, \quad (11)$$

co należało udowodnić. □