

LXVI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja:

jeden punkt za każdą poprawną odpowiedź, zero punktów za brak odpowiedzi, minus jeden punkt za odpowiedź niepoprawną i jeden punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:

- (1) \mathbb{N} — zbiór liczb naturalnych; zakładamy, że 0 *nie jest* liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- (2) \mathbb{Z} — zbiór liczb całkowitych
- (3) $n!$ — n silnia, tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ dla $n \geq 1$ oraz $0! = 1$

1. Na ulicy Matematycznej znajdują się cztery domy ponumerowane od lewej do prawej liczbami od 1 do 4. W domach tych mieszkają osoby \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} i \mathcal{D} . Każda z nich ma inne zwierzę spośród α , β , γ i δ . Wiadomo, że

- (i) α mieszka w pierwszym domu;
- (ii) zwierzę β i osoba \mathcal{A} mieszkają w dwóch sąsiednich domach;
- (iii) zwierzę γ mieszka w którymś z domów po lewej stronie od domu osoby \mathcal{B} ;
- (iv) \mathcal{C} mieszka w czwartym domu.

Wówczas:

- (a) ...**TAK**... γ nie mieszka w dwóch ostatnich domach;
- (b) ...**TAK**... β jest zwierzęciem \mathcal{B} ;
- (c) ...**TAK**... \mathcal{D} i δ mieszkają w dwóch skrajnych domach.

2. Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $g(x) = \min\{|x - 2026|, |x + 2026|\}$. Wówczas:

- (a) ...**TAK**... istnieją dokładnie dwie wartości x , dla których $g(x) = 0$,
- (b) ...**TAK**... funkcja g jest funkcją parzystą,
- (c) ...**NIE**... równanie $g(x) = \frac{x}{2}$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

3. O liczbach dodatnich x, y, z wiadomo, że $x(y - z) = 1$ i $2x = y + z$. Wynika stąd, że

- (a) ...**TAK**... $y > z$;
- (b) ...**TAK**... $x > z$;
- (c) ...**TAK**... $y > x$.

4. Niech $\alpha = 18^\circ$. Wtedy:

- (a) ...**TAK**... $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$;
- (b) ...**NIE**... $\sin(3\alpha) = \cos(3\alpha)$;
- (c) ...**TAK**... $\sin(4\alpha) = \cos(\alpha)$.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Jeśli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to:
- ...NIE... ułamek $\frac{a+5b}{a+7b}$ też jest nieskracalny,
 - ...TAK... ułamek $\frac{3a+4b}{2a+3b}$ też jest nieskracalny,
 - ...TAK... ułamek $\frac{a+b}{a+2b}$ też jest nieskracalny.
6. Dany jest $\triangle ABC$. Wówczas:
- ...TAK... $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$;
 - ...NIE... jeśli AD, BE, CF są wysokościami, to $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$;
 - ...TAK... jeśli AS, BT, CU są środkowymi, to $\vec{AS} + \vec{BT} + \vec{CU} = \vec{0}$.
7. Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wtedy:
- ...NIE... jeśli $x + y + z \geq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$;
 - ...TAK... jeśli $x + y + z \leq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$;
 - ...NIE... jeśli $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq 3$, to $x + y + z \geq 3$.
8. Oznaczmy przez $f_m(x)$ rodzinę funkcji kwadratowych postaci
- $$f_m(x) = mx^2 - (3m + 4)x + m - 5 \quad \text{dla } m \neq 0.$$
- Wtedy:
- ...TAK... $f_m(1) > f_{m+1}(0)$ dla $m < -\frac{5}{2}$;
 - ...NIE... wyrażenie $\frac{f_4(x) - f_m(4)}{4}$ jest całkowite dla każdego całkowitego x i parzystego m ;
 - ...NIE... $f_m(x)$ ma dwa pierwiastki całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$.
9. Dany jest czworokąt $ABCD$. Oznaczmy przez E, F, G, H odpowiednio środki odcinków AB, BC, CD, DA . Wtedy:
- ...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, to $ABCD$ jest kwadratem;
 - ...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest prostokątem, to $ABCD$ jest rombem;
 - ...NIE... jeśli czworokąt $EFGH$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ jest czworokątem wypukłym.
10. Graniastosłup prawidłowy czworokątny (prostopadłościan o podstawie kwadratowej) rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju czworokąt. Wynika z tego, że:
- ...NIE... każdy z otrzymanych wielościanów ma co najmniej jedną ścianę kwadratową;
 - ...TAK... każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem, czworokątem lub pięciokątem;
 - ...NIE... w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie.
11. Cyfry x i y są cyframi liczby $M = 512xy34$ zapisanej w systemie dziesiętnym. Wówczas:
- ...NIE... istnieje dokładnie 10 par (x, y) takich cyfr, dla których 9 dzieli liczbę M ,
 - ...TAK... istnieją takie cyfry x i y , dla których 99 dzieli liczbę M ,
 - ...NIE... istnieją co najmniej dwie pary cyfr (x, y) , dla których 77 dzieli liczbę M .

12. Na płaszczyźnie danych jest 2026 prostych, spośród których k jest równoległych do osi OX , a pozostałe są równoległe do osi OY . Oznaczmy przez $S(k)$ liczbę obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę. Wówczas:
- ...**TAK**... $S(10) = S(2016)$,
 - ...**NIE**... $S(k) = k \cdot (2026 - k)$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, 2025$,
 - ...**TAK**... suma $S(0) + S(1) + \dots + S(2026)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4.
13. Dla liczby całkowitej n oznaczmy liczbę $n^2 + 3n + 4$ przez $L(n)$. Wówczas:
- ...**TAK**... $L(n)$ jest liczbą parzystą dla każdego $n \in \mathbb{Z}$;
 - ...**NIE**... $L(n)$ jest podzielne przez 3 dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$;
 - ...**TAK**... $L(n)$ jest liczbą pierwszą dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$.
14. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ o przeciwprostokątnej BC , dwusieczna CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 1, |BD| = 2$. Wówczas:
- ...**NIE**... $|CD| = \sqrt{3}$;
 - ...**TAK**... $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}$;
 - ...**TAK**... odległość D od boku BC jest równa 1.
15. Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera, dla którego oznaczamy
- $$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{oraz} \quad T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n},$$
- przy czym zakładamy, że $S_n \neq 0$ i $T_n \neq 0$ dla każdego n . Wtedy:
- ...**TAK**... istnieje ciąg (a_n) taki, że $S_n = T_n$ dla każdego n naturalnego;
 - ...**TAK**... dla nieparzystych n sumy S_n i T_n mają ten sam znak;
 - ...**NIE**... jeżeli a_n jest ciągiem liczb całkowitych, to $\frac{S_{2026}}{T_{2026}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.
16. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ o bokach $|AB| = 3, |BC| = 4, |CA| = 5$ i punkt X w jego wnętrzu. Wtedy:
- ...**TAK**... istnieje dokładnie jeden punkt X , dla którego stosunek pól $P_{\triangle ABX} : P_{\triangle BCX} : P_{\triangle CAX}$ wynosi $3 : 4 : 5$;
 - ...**NIE**... jeśli odległości punktu X od boków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od wierzchołków również są liczbami wymiernymi;
 - ...**TAK**... jeśli odległości punktu X od wierzchołków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od boków również są liczbami wymiernymi.
17. Istnieje kwadrat liczby naturalnej, który zakończony jest (w systemie dziesiętnym):
- ...**TAK**... dwoma cyframi 4;
 - ...**TAK**... trzema cyframi 4;
 - ...**NIE**... czterema cyframi 4.
18. Miesiąc nazwiemy sprytnym, gdy jego trzynastym dniem jest piątek. Wówczas:
- ...**NIE**... istnieje rok, w którym nie ma sprytnych miesięcy;
 - ...**TAK**... istnieje rok z dokładnie dwoma sprytnymi miesiącami;
 - ...**NIE**... istnieje rok z czterema (lub więcej) sprytnymi miesiącami.

19. Przez $\tau(n)$ oznaczamy liczbę dodatnich dzielników liczby n . Na przykład $\tau(6) = 4$, $\tau(11) = 2$ itd.

Przez a_n oznaczamy liczbę $\frac{\tau((n+1)!)}{\tau(n!)}$. Na przykład $a_1 = 2$, $a_2 = 2$. Wówczas:

- ...**TAK**... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n = 2$;
- ...**TAK**... istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n < 2$;
- ...**NIE**... $a_{11} = \frac{3}{2}a_{10}$.

20. Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 2$ dany jest wzorem:

$$a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Wtedy:

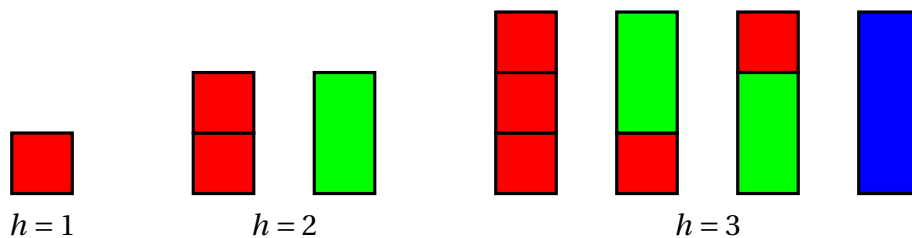
- ...**TAK**... ciąg (a_n) jest malejący;
- ...**TAK**... $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$;
- ...**NIE**... w postaci nieskracalnej licznik liczby a_n jest liczbą pierwszą dla każdego $n \geq 2$.

II. ZADANIA TEKSTOWE

Zadanie 1 (wersja kolorowa). W pudełko do gry „Tower” znajdują się trzy rodzaje klocków prostopadłościennych:

- czerwone o wymiarach $1 \times 1 \times 1$,
- zielone o wymiarach $1 \times 1 \times 2$,
- niebieskie o wymiarach $1 \times 1 \times 3$.

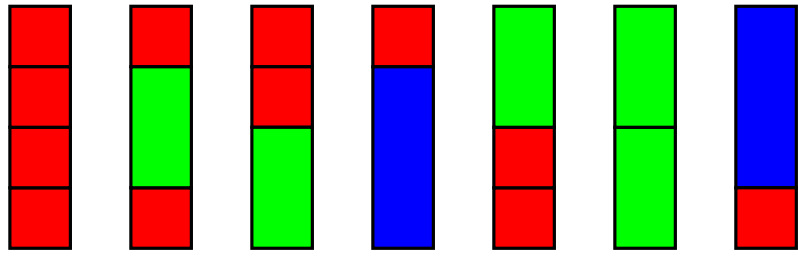
Gra polega na układaniu wieży o ustalonej wysokości h , poprzez ustawianie kolejnych klocków na sobie. Na poniższym schemacie przedstawiliśmy wszystkie możliwe wieże o wysokościach mniejszych niż 4.



Zakładamy, że dysponujemy nieograniczoną liczbą klocków każdego rodzaju. Niech T_h oznacza liczbę wszystkich możliwych wież o wysokości h . Z powyższego rysunku wynika, że $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ oraz $T_3 = 4$. Pokaż, że

- T_{13} jest liczbą nieparzystą.
- T_h jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy h daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 4.

Rozwiązanie. Z treści zadania znamy już T_1 , T_2 oraz T_3 . Wszystkie wieże wysokości $h = 4$ przestawiliśmy na następującym schemacie:



z którego wynika, że $T_4 = 7$. Podobnie można sprawdzić, że $T_5 = 13$ i $T_6 = 24$. W każdym następnym kroku liczba kolejnych wież będzie znacząco rosła i próba wyznaczenia (wyrysowania) ich wszystkich jest pozbawiona sensu. Zbadamy zachowanie tego ciągu.

W tym celu przyjrzyjmy się ponownie wszystkim wieżom wysokości $h = 4$. Zauważmy, że cztery pierwsze z narysowanych wież kończą się czerwonym klockiem, jest ich dokładnie tyle wież, co wysokości 3, czyli T_3 . Następne dwie wieże kończą się zielonym klockiem, zatem jest ich tyle co wież o wysokości 2, czyli T_2 . Ostatnia wieża kończy się niebieskim klockiem, jest tylko jedna, czyli dokładnie jak liczba T_1 . Stąd wniosek, że

$$T_4 = T_3 + T_2 + T_1.$$

W podobny sposób łatwo możemy zauważyć, że

$$T_5 = T_4 + T_3 + T_2 \quad \text{oraz} \quad T_6 = T_5 + T_4 + T_3.$$

Pokażemy, że zachodzi zależność rekurencyjna

$$(\star) \quad T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

W tym celu zauważmy, że dowolna wieża o wysokości $n + 3$ może kończyć się czerwonym, zielonym lub niebieskim klockiem. Jeżeli jest ona zakończona czerwonym klockiem, to pozostałe klocki w tej wieży tworzą wieżę o wysokości $n + 2$, takich wież jest dokładnie T_{n+2} . Jeżeli natomiast wieża kończy się zielonym klockiem, to pozostałe klocki tworzą wieżę o wysokości $n + 1$, takich wież jest dokładnie T_{n+1} . Ostatecznie wież z niebieskim klockiem na szczycie jest T_n . Zatem wszystkich wież o wysokości $n + 3$ jest $T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, co pokazuje (\star) .

Wykorzystując zależność rekurencyjną (\star) łatwo możemy doliczyć się, że $T_{13} = 1705$. Stąd T_{13} jest liczbą nieparzystą. Chociaż niewątpliwie łatwiej byłoby po prostu zastanowić się nad samą parzystością kolejnych wyrazów ciągu T_h . Istotnie $T_4 = T_3 + T_2 + T_1$ jest liczbą nieparzystą, gdyż jest sumą dwóch liczb parzystych i jednej nieparzystej. Podobnie T_5 jest nieparzyste, jako suma dwóch liczb parzystych i jednej nieparzystej. W ten sposób łatwo możemy otrzymać następującą tabelę:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
parzystość T_h	NP	P	P	NP	NP	P	P	NP	NP	P	P	NP	NP

co pokazuje nieparzystość T_{13} .

W dowodzie podpunktu **b.** wykorzystamy rozumowanie z części **a.** Rozważmy ciąg trójek

$$t_n := \left(T_n(\text{mod}2), T_{n+1}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2) \right),$$

gdzie $T_n(\text{mod}2)$ oznacza wzięcie reszty z dzielenia T_n przez 2. Ze wzoru rekurencyjnego (\star) zachodzi zależność

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \left(T_{n+1}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2) \right) \\ &= \left(T_{n+1}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2), T_{n+2}(\text{mod}2) + T_{n+1}(\text{mod}2) + T_n(\text{mod}2) \right). \end{aligned}$$

Zatem każda trójka t_n jednoznacznie wyznacza kolejną trójkę t_{n+1} . Odnotujmy, że wszystkich możliwych trójek jest 8 (każdy element trójki możemy wybrać na dwa sposoby 0 lub 1). Oznacza, to że jakies

dwie trójki muszą się powtórzyć, a wtedy wszystkie następne trójki będą pojawiały się okresowo. Z rachunku wykonanego w części **a.** (tabelka) wynika, że $t_1 = t_5$. Zatem wszystkie trójki będą się powtarzały z okresem równym 4. Stąd

wyrazy T_{n+4} i T_n mają tą samą parzystość dla każdego $n \geq 1$.

Ponieważ wśród czterech pierwszych wyrazów tylko T_2 i T_3 są parzyste, to T_n będzie parzyste wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 4k + 2$ lub $n = 4k + 3$ dla pewnego k naturalnego, co pokazuje tezę **b.** \square

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o bokach $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ oraz $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle BCD = \gamma$. Załóżmy, że w czworokąt ten można wpisać okrąg. Pokaż, że pole S czworokąta $ABCD$ wyraża się wzorem

$$S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right).$$

Rozwiązanie. Skoro czworokąt jest opisany na okręgu to:

$$a + c = b + d. \quad (1)$$

Podzielmy czworokąt przekątną BD na dwa trójkąty: ABD i BCD . W trójkącie ABD znamy boki $|AB| = a$, $|AD| = d$ oraz kąt α między nimi, więc jego pole wynosi $\frac{1}{2}ad \sin \alpha$. W trójkącie BCD mamy boki $|BC| = b$, $|CD| = c$ i kąt γ między nimi, więc jego pole to $\frac{1}{2}bc \sin \gamma$. Zatem pole całego czworokąta

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma). \quad (2)$$

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do boku BD w obu trójkątach otrzymujemy

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \quad (3)$$

$$|BD|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma. \quad (4)$$

Przyrównując prawe strony, dostajemy

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad \cos \alpha - bc \cos \gamma). \quad (5)$$

Rozważmy teraz wyrażenie $(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2$. Dodajmy do niego $(ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)^2$ i przekształćmy korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} & (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 + (ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)^2 \\ &= a^2 d^2 \sin^2 \alpha + b^2 c^2 \sin^2 \gamma + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma \\ & \quad + a^2 d^2 \cos^2 \alpha + b^2 c^2 \cos^2 \gamma - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma \\ &= a^2 d^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 c^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) \\ & \quad + 2abcd (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma) \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Stąd

$$(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - (ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)^2. \quad (6)$$

Z równania (5) mamy $ad \cos \alpha - bc \cos \gamma = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}$. Wstawiając to do (6) otrzymujemy

$$(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2. \quad (7)$$

Teraz wykorzystamy warunek styczności (1). Pokażemy, że

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad - bc. \quad (8)$$

Z (1) wynika $a - b = d - c$. Oznaczmy tę wspólną różnicę przez k , czyli $a = b + k$, $d = c + k$. Wtedy

$$\begin{aligned} ad - bc &= (b + k)(c + k) - bc = bc + bk + ck + k^2 - bc \\ &= k(b + c + k) = k(a + c), \\ \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} &= \frac{(b + k)^2 + (c + k)^2 - b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{b^2 + 2bk + k^2 + c^2 + 2ck + k^2 - b^2 - c^2}{2} = \frac{2k(b + c) + 2k^2}{2} \\ &= k(b + c + k) = k(a + c), \end{aligned}$$

co dowodzi (8).

Podstawiamy (8) do (7) (występuje tam kwadrat, więc możemy zastąpić $\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2$ przez $(ad - bc)^2$):

$$\begin{aligned} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - (ad - bc)^2 \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) - (a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2) \\ &= 2abcd(1 - \cos(\alpha + \gamma)). \end{aligned}$$

Ponieważ $\alpha + \gamma = 2\varphi$, więc $1 - \cos(2\varphi) = 2 \sin^2 \varphi$. Zatem

$$(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)^2 = 2abcd \cdot 2 \sin^2 \varphi = 4abcd \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Stąd

$$ad \sin \alpha + bc \sin \gamma = 2\sqrt{abcd} \sin \varphi, \quad (10)$$

gdzie wybieramy znak dodatni, ponieważ lewa strona jest dodatnia (kąty α, γ czworokąta wypukłego leżą w przedziale $(0, \pi)$, więc ich sinusy są dodatnie; także $\varphi = (\alpha + \gamma)/2 \in (0, \pi)$ i $\sin \varphi > 0$).

Wracając do wzoru (2) na pole, otrzymujemy

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma) = \sqrt{abcd} \sin \varphi, \quad (11)$$

co należało udowodnić. □