

IMIĘ I NAZWISKO:.....

LXVI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja:

jeden punkt za każdą poprawną odpowiedź, zero punktów za brak odpowiedzi, minus jeden punkt za odpowiedź niepoprawną i jeden punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:

(1) \mathbb{N} — zbiór liczb naturalnych; zakładamy, że 0 *nie jest* liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(2) \mathbb{Z} — zbiór liczb całkowitych

(3) $n!$ — n silnia, tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ dla $n \geq 1$ oraz $0! = 1$

1. Na ulicy Matematycznej znajdują się cztery domy ponumerowane od lewej do prawej liczbami od 1 do 4. W domach tych mieszkają osoby \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} i \mathcal{D} . Każda z nich ma inne zwierzę spośród α , β , γ i δ . Wiadomo, że

(i) α mieszka w pierwszym domu;

(ii) zwierzę β i osoba \mathcal{A} mieszkają w dwóch sąsiednich domach;

(iii) zwierzę γ mieszka w którymś z domów po lewej stronie od domu osoby \mathcal{B} ;

(iv) \mathcal{C} mieszka w czwartym domu.

Wówczas:

(a) γ nie mieszka w dwóch ostatnich domach;

(b) β jest zwierzęciem \mathcal{B} ;

(c) \mathcal{D} i δ mieszkają w dwóch skrajnych domach.

2. Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $g(x) = \min\{|x - 2026|, |x + 2026|\}$. Wówczas:

(a) istnieją dokładnie dwie wartości x , dla których $g(x) = 0$,

(b) funkcja g jest funkcją parzystą,

(c) równanie $g(x) = \frac{x}{2}$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

3. O liczbach dodatnich x, y, z wiadomo, że $x(y - z) = 1$ i $2x = y + z$. Wynika stąd, że

(a) $y > z$;

(b) $x > z$;

(c) $y > x$.

4. Niech $\alpha = 18^\circ$. Wtedy:

(a) $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$;

(b) $\sin(3\alpha) = \cos(3\alpha)$;

(c) $\sin(4\alpha) = \cos(\alpha)$.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Jeśli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to:
- ułamek $\frac{a+5b}{a+7b}$ też jest nieskracalny,
 - ułamek $\frac{3a+4b}{2a+3b}$ też jest nieskracalny,
 - ułamek $\frac{a+b}{a+2b}$ też jest nieskracalny.
6. Dany jest $\triangle ABC$. Wówczas:
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;
 - jeśli AD, BE, CF są wysokościami, to $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$;
 - jeśli AS, BT, CU są środkowymi, to $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CU} = \vec{0}$.
7. Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wtedy:
- jeśli $x + y + z \geq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$;
 - jeśli $x + y + z \leq 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$;
 - jeśli $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq 3$, to $x + y + z \geq 3$.
8. Oznaczmy przez $f_m(x)$ rodzinę funkcji kwadratowych postaci
- $$f_m(x) = mx^2 - (3m + 4)x + m - 5 \quad \text{dla } m \neq 0.$$
- Wtedy:
- $f_m(1) > f_{m+1}(0)$ dla $m < -\frac{5}{2}$;
 - wyrażenie $\frac{f_4(x) - f_m(4)}{4}$ jest całkowite dla każdego całkowitego x i parzystego m ;
 - $f_m(x)$ ma dwa pierwiastki całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$.
9. Dany jest czworokąt $ABCD$. Oznaczmy przez E, F, G, H odpowiednio środki odcinków AB, BC, CD, DA . Wtedy:
- jeśli czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, to $ABCD$ jest kwadratem;
 - jeśli czworokąt $EFGH$ jest prostokątem, to $ABCD$ jest rombem;
 - jeśli czworokąt $EFGH$ jest równoległobokiem, to $ABCD$ jest czworokątem wypukłym.
10. Graniastosłup prawidłowy czworokątny (prostokąt o podstawie kwadratowej) rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju czworokąt. Wynika z tego, że:
- każdy z otrzymanych wielościanów ma co najmniej jedną ścianę kwadratową;
 - każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem, czworokątem lub pięciokątem;
 - w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie.
11. Cyfry x i y są cyframi liczby $M = 512xy34$ zapisanej w systemie dziesiętnym. Wówczas:
- istnieje dokładnie 10 par (x, y) takich cyfr, dla których 9 dzieli liczbę M ,
 - istnieją takie cyfry x i y , dla których 99 dzieli liczbę M ,
 - istnieją co najmniej dwie pary cyfr (x, y) , dla których 77 dzieli liczbę M .

IMIĘ I NAZWISKO:.....

12. Na płaszczyźnie danych jest 2026 prostych, spośród których k jest równoległych do osi OX , a pozostałe są równoległe do osi OY . Oznaczmy przez $S(k)$ liczbę obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę. Wówczas:
- $S(10) = S(2016)$,
 - $S(k) = k \cdot (2026 - k)$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, 2025$,
 - suma $S(0) + S(1) + \dots + S(2026)$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4.
13. Dla liczby całkowitej n oznaczmy liczbę $n^2 + 3n + 4$ przez $L(n)$. Wówczas:
- $L(n)$ jest liczbą parzystą dla każdego $n \in \mathbb{Z}$;
 - $L(n)$ jest podzielne przez 3 dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$;
 - $L(n)$ jest liczbą pierwszą dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$.
14. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ o przeciwprostokątnej BC , dwusieczna CD dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 1, |BD| = 2$. Wówczas:
- $|CD| = \sqrt{3}$;
 - $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{2}$;
 - odległość D od boku BC jest równa 1.
15. Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera, dla którego oznaczamy
- $$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{oraz} \quad T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n},$$
- przy czym zakładamy, że $S_n \neq 0$ i $T_n \neq 0$ dla każdego n . Wtedy:
- istnieje ciąg (a_n) taki, że $S_n = T_n$ dla każdego n naturalnego;
 - dla nieparzystych n sumy S_n i T_n mają ten sam znak;
 - jeżeli a_n jest ciągiem liczb całkowitych, to $\frac{S_{2026}}{T_{2026}}$ jest kwadratem liczby naturalnej.
16. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ o bokach $|AB| = 3, |BC| = 4, |CA| = 5$ i punkt X w jego wnętrzu. Wtedy:
- istnieje dokładnie jeden punkt X , dla którego stosunek pól $P_{\triangle ABX} : P_{\triangle BCX} : P_{\triangle CAX}$ wynosi $3 : 4 : 5$;
 - jeśli odległości punktu X od boków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od wierzchołków również są liczbami wymiernymi;
 - jeśli odległości punktu X od wierzchołków są liczbami wymiernymi, to jego odległości od boków również są liczbami wymiernymi.
17. Istnieje kwadrat liczby naturalnej, który zakończony jest (w systemie dziesiętnym):
- dwoma cyframi 4;
 - trzema cyframi 4;
 - czterema cyframi 4.
18. Miesiąc nazwiemy sprytnym, gdy jego trzynastym dniem jest piątek. Wówczas:
- istnieje rok, w którym nie ma sprytnych miesięcy;
 - istnieje rok z dokładnie dwoma sprytnymi miesiącami;
 - istnieje rok z czterema (lub więcej) sprytnymi miesiącami.

19. Przez $\tau(n)$ oznaczamy liczbę dodatnich dzielników liczby n . Na przykład $\tau(6) = 4$, $\tau(11) = 2$ itd. Przez a_n oznaczamy liczbę $\frac{\tau((n+1)!)}{\tau(n!)}$. Na przykład $a_1 = 2$, $a_2 = 2$. Wówczas:

- (a) istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n = 2$;
 (b) istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n < 2$;
 (c) $a_{11} = \frac{3}{2}a_{10}$.

20. Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 2$ dany jest wzorem:

$$a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

Wtedy:

- (a) ciąg (a_n) jest malejący;
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$;
 (c) w postaci nieskracalnej licznik liczby a_n jest liczbą pierwszą dla każdego $n \geq 2$.

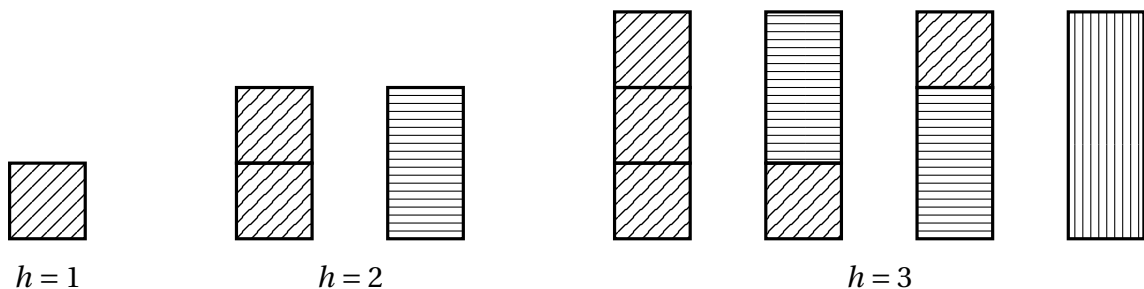
II. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0; 10]$ (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. W pudełku do gry „Tower” znajdują się trzy rodzaje klocków prostopadłościennych:

- pierwszy rodzaj o wymiarach $1 \times 1 \times 1$,
- drugi rodzaj o wymiarach $1 \times 1 \times 2$,
- trzeci rodzaj o wymiarach $1 \times 1 \times 3$.

Gra polega na układaniu wieży o ustalonej wysokości h , poprzez ustawianie kolejnych klocków na sobie. Na poniższym schemacie przedstawiliśmy wszystkie możliwe wieże o wysokościach mniejszych niż 4.



Zakładamy, że dysponujemy nieograniczoną liczbą klocków każdego rodzaju. Niech T_h oznacza liczbę wszystkich możliwych wież o wysokości h . Z powyższego rysunku wynika, że $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ oraz $T_3 = 4$. Pokaż, że:

- a) T_{13} jest liczbą nieparzystą;
 b) T_h jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy h daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 4.

2. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o bokach $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ oraz $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle BCD = \gamma$. Załóżmy, że w czworokąt ten można wpisać okrąg. Pokaż, że pole S czworokąta $ABCD$ wyraża się wzorem

$$S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right).$$